técnica

$$\frac{\partial \gamma}{\partial e'_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu$$

«É esta a forma mais condensada de escrever as equações da Dinâmica»

449/450

associação dos estudantes do instituto superior técnico

setembro/outubro 1978 revista de engenharia

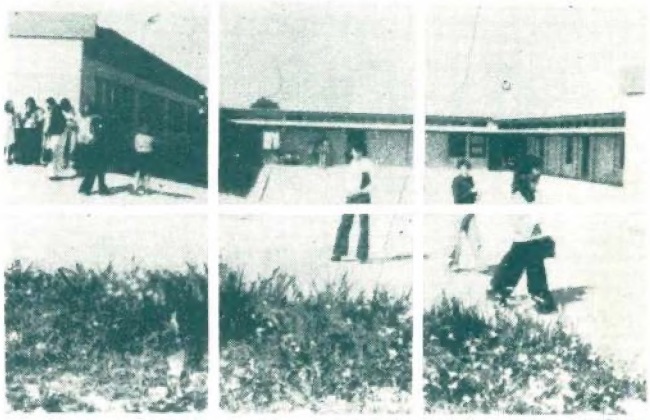
SOMAPRE

COBERTURAS
PARA TODOS OS FINS

SOMAPRE

SOCIEDADE DE MATERIAIS PRÉESFORÇADOS, S.A.R.L.
Av. da República, 83-2.º - tel. 76 00 45/6/7/8 - Lisboa

PRÉ-FABRICAÇÃO
em betão



MOITA

EDIFÍCIOS ESCOLARES
HABITAÇÃO SOCIAL
ESCRITÓRIOS
FÁBRICAS
MORADIAS
ETC.

materiais novobra

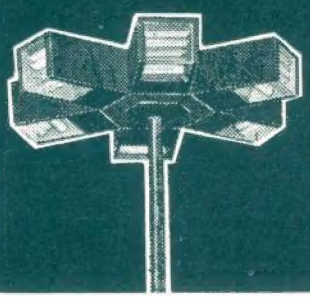
Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagos, Guarda e Moita.

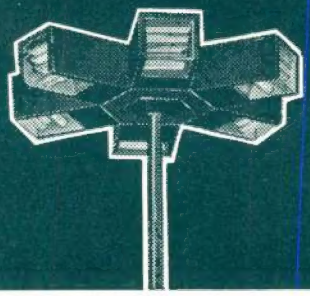
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100-5.º Dt.º — Lisboa-5
Telefones — Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 • Telex: 18373 NOVOBA P
Serviços Técnicos: 89 41 16/7/8 - 89 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

ARMADURA-GN

Iluminação
é o nosso ofício





SCHRÉDER, S.A.R.L.

Carnaxide — Tel. 218 00 37

AOS NOSSOS LEITORES

Devido a dificuldades surgidas durante a composição tipográfica, só agora nos é possível editar o presente número especial «Em homenagem ao Professor Mira Fernandes».

Pedindo desculpa por esta interrupção, espera a Direcção da «Técnica» superar de futuro dificuldades idênticas, tendo já tomado providências para tal.

técnica

NÚMERO 449/450 SETEMBRO/OUTUBRO 1978 ANO LIII VOLUME XL PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
José Luís S. V. Azevedo
COLABORADORES
João José Águas
Sérgio Duarte Santos (F. C. Tecnologia — Coimbra)
FUNCIONÁRIOS
Jorge Graça
Fernanda Sanches
CONSELHO CIENTÍFICO
Alves, Luís de Almeida
Barros, Luís A. Aires
Calado, Jorge C. G.
Conte, J. C.
Costa, Fernando Vasco
Dias, A. Romão
Domingos, J. J. Delgado
Faro, Manuel José de Abreu
Ferreira, J. Campos
Figanier, J. P.
Garrido, M. S.
Horta, Ricardo Bayão
Loureiro, A. Pádua
Manzanares, Alberto Abecasis
Moura, Domingos
Moura, J. M. Fonseca de
Moutinho, A. M. C.
Oliveira, E. R. de Arantes e
Portela, A. Gouvêa
Quintela, António de Carvalho
Rogado, José Quintino
Santos, A. F. Ferreira dos
Serafim, J. Laginha
Simões, F. Rebelo
Silva, J. Borges da
Tavares, L. Valadares
Trindade, Rocha
DIRECÇÃO, REDACÇÃO
E ADMINISTRAÇÃO
Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 88 93 23
PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.
Não se publica em Agosto e Setembro.
Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
OF. GRÁFICAS DE RÁDIO RENASCENÇA
Rua Duques de Bragança, 6 — LISBOA-2

SUMÁRIO

1 — **MANUEL JOSÉ DE ABREU FARO — Aureliano de Mira Fernandes — Professor do Instituto Superior Técnico.**

Aureliano de Mira Fernandes — Professor of Instituto Superior Técnico.

11 — **ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO — Conjuntos graduados de Zadeh.**

On fuzzy sets.

35 — **MANUEL JOSÉ DE ABREU FARO — Sobre o estabelecimento das condições fronteiras de natureza electrodinâmica numa superfície em movimento.**

On the establishment of electrodynamic boundary conditions at a moving surface.

45 — **F. E. REBELO SIMÕES — Alguns aspectos da correlação de 3.ª ordem e do bispectro dos processos estacionários.**

Some aspects of the 3rd order correlation and of the bispectrum of stationary processes.

73 — **ANTÓNIO BROTAS — Sobre a elasticidade relativista dos corpos rígidos: a lei de Hooke relativista.**

On the relativistic elasticity of the rigid bodies: relativistic Hooke's law.

71 — **NOTICIÁRIO**

CAPA — Medalhão representativo do Professor Aureliano de Mira Fernandes

AGRADECIMENTO

Queremos deixar aqui expressa uma palavra de reconhecido agradecimento dirigida à Comissão Directiva do Instituto Superior Técnico, pelo recente subsídio que tiveram a amabilidade de atribuir à nossa revista, no valor de 150 000$00.

A DIRECÇÃO DA TÉCNICA

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
Aguiar & Melo, Lda.	XIII
Beiersdorf Portuguesa, Lda. «Tesa»	VI e XI
Construções Schréder	2.ª da capa
Crosby Europe	XII
Editora McGraw-Hill de Portugal, Lda.	II
Georges Fischer, AG	IV
GTR — Gab. Técnico de Revestimentos, Lda. ...	IX
MAGUE	III
Metropolitano de Lisboa	VIII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Philips Portuguesa, S. A. R. L.	V e X
Soc. Electricidade Brown Boveri	VII
Soc. Portuguesa Cavan...	II
SOMAPRE	2.ª da capa
Sopecate	II
SOREFAME — Soc. Reunidas de Fabricações Metálicas, S. A. R. L.	3.ª da capa
S. K. F., Lda.	I

Colaboraram neste número as seguintes Agências de Publicidade:

IVA AG FÜR INTERNATIONALE WERBUNG, JDM-JARVIS DAY MOUSELL INTERNATIONAL, LTD, ABRINÍCIO, ESPIRAL e HORA.

NORMAS PARA ENTREGA DE ARTIGOS

Chamamos a atenção dos Autores para as seguintes normas referentes à entrega de artigos:

1) Só se aceitam artigos dactilografados.
2) Os artigos deverão vir acompanhados de resumos em português e inglês.
3) Qualquer dos resumos não poderá exceder oitenta palavras.
4) Não serão aceites trabalhos excedendo 30 páginas (incluindo desenhos, fotografias, listagens de computador...).
5) Será dada prioridade de publicação a notas científicas que não excedam duas páginas no total.
6) Não se aceitam trabalhos já publicados em revistas estrangeiras.

TÉCNICA — Revista de Engenharia

(Publicação mensal)

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas ...	200$00	350$00
Países de língua Portuguesa e Espanha	220$00	380$00
Estrangeiro	—	550$00
Número avulso	—	60$00

Não se publica em Agosto e Setembro

Encontram-se à venda na Secção Técnica, A. E. I. S. T., praticamente todos os números publicados até à data. Os preços são:

1 a 420 (inclusive)—10$00 por exemp.
421 a 437 (inclusive)—35$00 » »
438 e seguintes * ...—60$00 » »

* *Excepto números duplos ou especiais.*

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas

rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios para rolamentos.

Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes

e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

ESPECIALISTA DESDE 1947

sopecate

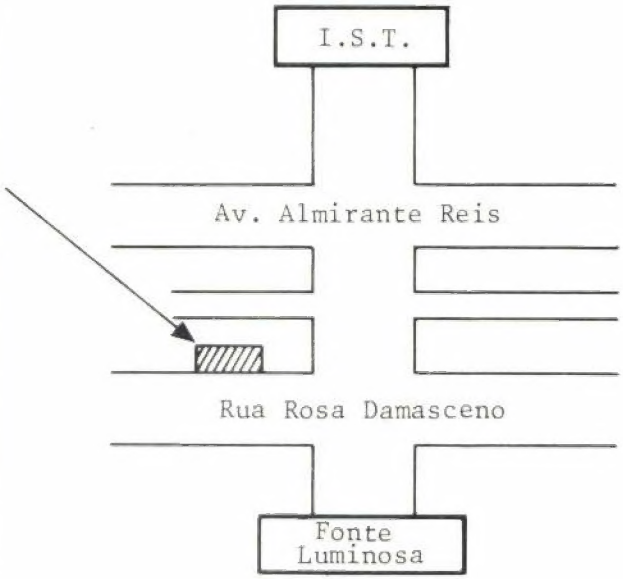
ESTUDOS
GEOTÉCNICOS

FUNDAÇÕES
ESPECIAIS

RUA DO ARSENAL, 146-2º
TELFS. 320208 · 360437 · 364010
LISBOA

McGraw Hill

Editora
McGraw-Hill
de Portugal Lda.



ESTAMOS AQUI PARA O SERVIR.
LIVROS TÉCNICOS
E CIENTÍFICOS
EM TODOS OS RAMOS

- ENGENHARIA CIVIL
- ENGENHARIA QUÍMICA
- ENGENHARIA ELECTRÓNICA
- ENGENHARIA MECÂNICA
- MATEMÁTICA
- ECONOMIA
- GESTÃO DE EMPRESAS

MAIS DE VINTE MIL TÍTULOS
DIFERENTES EM PORTUGUÊS,
INGLÊS, FRANCÊS E ESPANHOL

Rua Rosa Damasceno, 11-A — Telefs. 576690 - 577322 — LISBOA 1

técnica

NÚMERO 449/450 SETEMBRO/OUTUBRO 1978 ANO LIII VOLUME XL PUBLICAÇÃO MENSAL

Aureliano de Mira Fernandes

Professor do Instituto Superior Técnico

Mira Fernandes faleceu em 19 de Abril de 1958.

Quando soubemos que o seu corpo saíria do Instituto Superior Técnico, a nós, os daqui, que o respeitávamos e estimávamos, sensibilizou-nos essa ideia que foi justa.

Fez, quem de direito, o que devia. O que depois sucedeu foi além. Mas devemos aceitar que, procedendo assim, devolvendo o professor à Escola, ainda que num breve e derradeiro tempo, se propiciou que a memória da sua voz e palavra reconduzisse as gerações que ao longo de mais de quarenta anos ouviram, aprenderam, ou tão simplesmente sentiram, quem durante esse longo magistério foi permanente fonte de modernidade, de inquietação contemporânea, de entrega total ao acto de ensinar, de fidelidade incorrupta ao pensamento científico e à verdade da Ciência.

Na vigília da última noite, além daqueles que circustancialmente aparecem sempre, foram chegando de todo o País, dos mais diversos lugares e ocupações, antigos alunos que no dia seguinte se repetiram e acompanharam o corpo de Mira Fernandes até ao termo da sua peregrinação.

Foi um facto a que assistimos e nos impressionou.

E como o enterro do Professor Mira Fernandes não se classifica naqueles que dão lugar a emprego ou promoção.

Porque muitos dos que ali estavam trabalharam muito e tiveram dificuldades, que não esqueciam, nas disciplinas que ele leccionou.

Porque muitos não alcançaram classificações elevadas e até teriam reprovado uma ou mais vezes.

Porque o Professor Mira Fernandes além de exemplo e ensinamento não lhes deu mais do que isso e não os colocou.

Por ser assim, abrimos estas palavras de memória com a narração destes factos que se constituiram inequívoca prova da legitimidade de Mira Fernandes, como valor da Cultura Portuguesa, como professor da Universidade Portuguesa, como motivo de reflexão e encorajamento de professores e alunos do Instituto Superior Técnico, Escola onde ensinou de modo principal e ininterrupto desde 1911 até 1954.

Triste não é morrer.

Triste talvez seja que a morte de Mira Fernandes tenha ocorrido tão próxima dos tempos em que deixou de ensinar.

A doença ocorre, mas a ausência do exercício arquitecta motivos de doença.

O convívio das aulas, o acto de ensinar, a aquisição de conceitos modernos e fundamentais no entusiasmo de os transmitir, logo, na semana, no dia seguinte, nas aulas. Quantas vezes assistimos a isso.

O sair do Técnico, a pé, meditando, até à sua casa em S. Bento. Preocupações idênticas no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras onde também ensinava.

A crença de que a juventude é quem mais merece e um dia frutificará o que aprendeu, por vezes, com espanto, interrogação, e até revolta.

Um exame de consciência permanente que a solidão exacerba e a dúvida que até nos mais lúcidos se constrói:

Saber-se aproveitado ou não ter sabido aproveitar de qualidades, que essas são heranças que se trazem.

Tudo isso talvez tenha sido inteiramente real, de tal modo é divisor comum das pessoas, dos homens livres e descomprometidos como foi Mira Fernandes.

Mas não é exactamente triste.

Assim começamos com estes tempos de morte que, nos termos em que aconteceram, são tempos de vida, de renovação, de uma outra versão dos professores e homens, ainda úteis nas escolas onde ensinaram e nos discípulos que formaram.

* * *

O Professor Mira Fernandes era um homem de trato simples, pelo menos para as pessoas simples e simples éramos nós, os alunos, na natural condição da nossa idade.

Noutras circunstâncias, por contacto directo que tivemos, ou por notícia que colhíamos com atenção de fontes desapaixonadas também o entendemos sempre como um homem simples.

No entanto, sensível, extremamente directo, revelando claramente o seu pensamento, rigoroso em questões de carácter, demarcando claramente as regras de qualquer jogo, esperando de modo ingénuo e puro reciprocidade de trato.

Tinha um modo próprio.

Nas aulas, quando entrávamos, já lá estava, sentado, não de frente, sobre o seu lado esquerdo levemente encostado à secretária, olhando vagamente, e de vez em quando para nós. Aí pelos dez minutos o anfiteatro estava composto. Iniciava então a aula.

Fazia-o sempre com entusiasmo, através de adequadas palavras de iniciação, as mais diversas: genética do assunto que ia tratar, objectivos, evolução, potencialidades e limitações da teoria que se ia expor, problemas que permitiria resolver.

Nisto tudo referia e encadeava as fontes originais desses resultados — os autores, a ambiência, uma dada época nos problemas que enfrentou, uma nova época nos problemas novos que conseguiu formular e resolver.

Deste modo punha a dialogar perante nós matemáticos e físicos do passado, que tinham sido contemporâneos ou tão simplesmente continuaram ou deram resposta ao que dos outros ficou e souberam tomar.

Isto sentia-se. Por isso as aulas do Professor Mira Fernandes eram vivas e de certo modo fascinavam.

A par disso havia uma exposição incisiva e lógica, sempre claramente conclusiva.

Havia um formalismo belo e potente.

Denso. Exigindo, para ser compreendido, atenção ao que vinha sendo exposto.

Como é natural, por vezes, faltava-se. Havia a tradicional interacção de exames e aulas.

Quando assim sucedia era fatal, perdia-se o pé.

Havia que esperar o início de outro capítulo e, colhendo lição do que acontecera, reacompanhar o expositor.

Aconteceu isto a todos quantos foram seus alunos.

Mas aprendemos muito. Aprendemos muito e esquecemos muito. Porque nas outras disciplinas que se seguiam, mais pragmáticas, nem sempre se soube ou pôde dar continuidade e aplicação ao que o Professor Mira Fernandes ensinara.

Porque nessa época, e ainda hoje é assim, aos jovens engenheiros não se ofereciam técnicas e indústrias evoluídas.

Porque nesse tempo pouca era a investigação sistemática praticada na Escola, salvo raríssimas excepções.

Estes factos constituiram-se, por vezes, e para aqueles que mais cuidam da instrução do que da formação, motivo de alguma crítica.

Construiram-se mitos.

Mas não é verdade. Julgamos que o Professor Mira Fernandes cumpriu o seu dever.

O que nos proporcionou em cada aula, até ao último dia de professor, foi um permanente convite ao uso do método científico, uma advertência clara e profética sobre as potencialidades da análise matemática nas suas mais diversas aplicações.

As matérias que ensinava eram de uma actualidade extrema. Tendo em consideração preocupações de hoje, da Física e da Tecnologia, os seus ensinamentos, sem descurar do presente, projectavam-se num futuro que ainda não se atingiu.

O Professor Mira Fernandes era um matemático, tinha sido a sua formação. Foi matemático até ao fim da sua vida.

Mas não subordinou a Escola aos seus interesses.

Pelo contrário. Prejudicou os seus interesses pessoais de investigador por amor e dever. Isto nas duas Escolas onde ensinou, Técnico e Económicas e Financeiras. Estamos certos disso.

Nos seus cursos, nos numerosos trabalhos de investigação e síntese que publicou há, em quase todos, uma referência, uma atenção especial, ou uma directa aplicação no domínio da Física.

Assim o Técnico dispôs durante mais de 40 anos de alguém que incansavelmente ia advertindo e comunicando sobre o pensamento contemporâneo e os seus destinos.

De alguém que se motivou.

De alguém que aguardou motivos.

De alguém que não tendo recebido esse incentivo continuou a motivar-se, até ao fim, fiel a uma lúcida consciência dos deveres de um professor e aos chamamentos de uma vocação.

Lembro-me de um dia em que o formalismo fora particularmente denso.

O Professor Mira Fernandes movia-se à vontade, sorria.

De repente estacou e disse: isto é simples o que é preciso é fazer todos os dias.

Era assim.

As suas aulas eram vivas, não eram recitadas.

Por mais de uma vez o assisti suspender-se no raciocínio, apagar tudo, recomendar outra via: isto não leva a nada.

Mas nesta legitimidade de ensinar o que é dos outros quando passa por nós. E quantas coisas não eram só dele.

Nessa potencialidade, que tinha, de dar uma aula quando quisesse e como quisesse.

Não obstante isso, o Professor Mira Fernandes preparava, uma a uma, as suas aulas. Acompanhava-se de uns linguados de papel almaço que não consultava e onde na véspera ordenara o seu pensamento e arquitectara a intenção: dever de professor que escrupulosamente seguia, respeito pelo ensino e por aqueles que o iam ouvir, cuidado que sempre pôs de atingir o que anunciava e se propunha.

Quando se sabe um pouco, como nós sabemos, o que foi a vida do Professor Mira Fernandes e o nobilíssimo desinteresse em que a praticou acodem-nos as palavras de Rilke nas Cartas a um Poeta:

«E se lhe vierem versos deste regresso a si próprio, deste mergulho no seu mundo, não pensará em perguntar se são bons ou não, não procurará conseguir que revistas e jornais se interessem pelos seus trabalhos, porque gozará deles como de um dos modos de vida e de expressão. Uma obra de arte é boa quando nasce de uma necessidade: é a natureza da sua origem que a julga.»

Nesta atitude, plenamente realizado nas suas aulas e com os seus alunos, o Professor Mira Fernandes oferecia-nos a imagem tranquila e tantas vezes sorridente de um homem feliz.

Mas cuidou pouco de si.

Não arrecadou. Desprovido de bens materiais, também não pôs especial cuidado na organização de um curriculo oficial.

Não preparou a sua perenidade.

Dia a dia empobrecia-se de capitais entregando a sua obra aos seus alunos, a quantos o procurassem já formados.

No entanto, esse curriculo existe.

Em boa hora se decidiu publicar as Obras Completas de Mira Fernandes.

No entanto, ele foi mais: as gerações que por ele passaram, os especialistas, sentiam e sabiam isso.

O respeito e a admiração por Mira Fernandes não se construiram por acaso.

* * *

«Nunca me seduziu escrever um tratado ou seguer um livro de curso», disse Mira Fernandes no termo da sua carreira de professor.

Assim vem referido pelo Professor Vicente Gonçalves na Introdução às Obras Completas de Aureliano Mira Fernandes — Lisboa — 1971, que cita o Professor Ramos e Costa como origem dessa afirmação.

Atraíam-no mais os ensaios e os artigos.

O tratamento pessoal que sempre caracterizou as suas publicações permitem-nos entender a afirmação que, vindo de quem vem, é desassombradamente sincera. Talvez que esse imperativo apenas lhe tenha consentido a elaboração de obras que, quando extensas, não foram além de monografias.

É um facto que se lamenta mas é mais um cunho de modernidade e, em última análise, de extrema humildade e consciência intelectual: se há quem fez porque repetir?

Os seus cursos estavam em permanente evolução.

De ano para ano mudava a ordenação das matérias. Resultava, assim, e por cada ano, um curso diferente mas sempre harmónico e logicamente encadeado.

Nesses cursos:

— Cálculo Integral. Cálculo Infinitésimal e das Variações — 2.º ano do IST
— Mecânica Racional — 3.º ano do IST

que eram extensos e profundos continha-se tudo quanto, em boa verdade, um engenheiro necessita aprender para passar a dispor de uma sólida formação em ciências matemáticas.

Tudo quanto necessitaria para resolver problemas aplicados ou iniciar, mais tarde, uma pós-graduação: em Engenharia ou Física Matemática.

Existem folhas, as mais recentes dão-nos uma ideia clara da extensão e profundidade dos seus cursos. Quem souber entenderá.

Temos esperanças que, um dia, devidamente cuidados na forma que não era exactamente a de Mira Fernandes — trata-se de folhas — esses cursos sejam editados. Julgamos que essa intenção preside à publicação das Obras Completas de Mira Fernandes.

E que não se julgue que se converterão em património histórico com laivos de romantismo.

Continuam modernos, actuais, necessários:

O Cálculo: um primor de exactidão e simplicidade num tratamento exaustivo da Teoria da Integração, da Análise Infinitesimal e do Cálculo de Variações.

A Mecânica: antecedida por profundos e necessários complementos de Análise entrava decididamente na Mecânica Analítica de Lagrange, depois de abordados os conceitos fundamentais da Mecânica Clássica. Considerava-se ainda, a Mecânica dos Fluidos, terminava o curso com a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica.

Em matéria de contribuições originais é espantoso como dissolvia humildemente os novos resultados nas suas lições.

Um exemplo: «Princípio de velocidade mínima».

«Podemos pois enunciar:

«No movimento expontâneo, a trajectória da fase é percorrida pelo ponto M, representativo do sistema, com uma velocidade escalar que é mínima em relação àquela com que seriam percorridas todas as outras trajectórias possíveis, compatíveis com as ligações».

Ainda mais espanta, embora tivesse sido objecto de publicação em Portugaliae Mathematica, 1941, **Equazioni della dinâmica,** que entregasse as Equações da Dinâmica, ao curso, sem um reparo especial, nesta simplicidade:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial e'_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1,2 \ldots \nu$$

«É esta a forma mais condensada de escrever as equações da Dinâmica».

e'_α são as derivadas em ordem ao tempo das características cinéticas e_α.

«A função γ costuma chamar-se, muitas vezes, constricção de Gauss nome que é mais correntemente dado a outra função, como depois veremos».

Depois seguem-se as equações de Appell, de Maggi etc.

As equações de Mira Fernandes atingem, no entanto, a máxima simplicidade e, portanto, são um resultado notabilíssimo que se acompanha, simultaneamente, de uma grande beleza formal.

Ver P. Varennes e Mendonça «Sobre as várias maneiras de escrever as equações gerais da mecânica dos sistemas com um determinado número finito de graus de liberdade — Gazeta de Matemática — n.º 94-95 — Jan.-Junho 1964.

* * *

As publicações do Professor Mira Fernandes repartem-se de modo principal pela Técnica (47 publicações), Rendiconti della Real Academia dei Lincei (17 comunicações) Portugaliae Mathematica (13 publicações) e Academia das Ciências de Lisboa (4 comunicações e um curso proferido no Instituto dos Altos Estudos sobre **Modernas concepções da Mecânica.**

No fim da sua carreira, o quadro em que se movia, está claramente sintetizado pelo Professor Vicente Gonçalves nas palavras com que termina a Introdução às Obras Completas de Aureliano Mira Fernandes:

«Incompreendido, refugiou-se no estudo. Retomou a teoria dos pseudo-extensores, que edificara em 1943 (adiantando-se então a investigadores de renome), mas a que só pudera voltar em 1952. Durante três anos reviu, esclareceu e generalizou seus anteriores resultados, perfazendo uma fecunda contribuição pessoal para o progresso do cálculo extensorial e da geometria diferencial de ordem superior. De caminho, escreveu ainda um ensaio sobre a evolução da geometria de Riemann e fez algumas investigações de Geometria e Mecânica.

Já em sensível declínio de saúde, continuava a estudar. Estudou sempre; e a inexorável doença, que lhe cortou o estudo, por imprescindível determinação de capa e batina o levou para o derradeiro claustro (19 de Abril de 1958).

* * *

Terminaremos esta memória com palavras de Mira Fernandes, transcritas do que publicou no âmbito do Instituto Superior Técnico e sempre entregou à nossa revista, a Técnica.

Na inteligência superior que tinha da Vida e da Ciência, Mira Fernandes dispunha desse dom, que é raro, da síntese:

Enriquecia as suas publicações com períodos, onde de modo breve mas completo, resumia um propósito, apresentava uma teoria, configurava uma situação.

Na comemoração do bi-centenário do nascimento de Lagrange — (Boletim da Academia das Ciências de Lisboa, 1936) — criador da Mecânica Analítica — Mecânica Lagrangeana como lhe era grato dizer, Mira Fernandes aplica à obra de Lagrange aquilo que, sem premeditação e em jeito de servir, mereceu também para si próprio:

«Definir, esclarecer, generalizar são as principais características da sua obra científica».

* * *

No ano lectivo de 1922-23 realizou Mira Fernades no Instituto Superior Técnico um curso livre sobre «Geometria Infinitésimal».

Desse curso resultaram, mais tarde, duas monografias importantes:

Elementos da Teoria das Formas Quadráticas — Lisboa — 1924.

Inicia a publicação dessa monografia com as seguintes palavras:

«A teoria das formas quadráticas é um dos mais notáveis e preciosos instrumentos da ciência moderna.

A fecunda utilização das formas algébricas nas teorias clássicas da álgebra e das formas diferenciais na geometria infinitesimal, acresce a sua principal importância na exposição das teorias e métodos do cálculo tensorial e do cálculo diferencial absoluto.

Os conceitos de invariante e de parâmetro diferencial, e a facilidade da sua construção, para uma forma dada, mediante uma forma covariante auxiliar; a noção de derivada covariante, que tão simplesmente se presta também à formação de parâmetros diferenciais; o uso dos símbolos de Christoffel e Riemann, facilitando o emprego e abreviando a transformação de complicadas expressões analíticas, são as razões fundamentais da fecundidade da teoria das formas quadráticas».

Da segunda, **Fundamentos da Geometria Diferencial dos Espaços Lineares** — Lisboa — 1927, consta, além do mais:

...«Sabia-se que o espaço riemanniano (o mais simples dos espaços lineares não homogéneos) admite uma homogeneidade infinitesimal por correspondência biúnivoca de cada ponto duma vizinhança infinitesimal do ponto M a um ponto do espaço euclidiano tangente em M.

Mas foi só em 1917 que Levi-Civita, definindo o conceito de deslocamento paralelo, estabeleceu duma maneira precisa a possibilidade de relacionar entre si biunivocamente os espaços euclidianos tangentes a um mesmo espaço riemanniano, em dois pontos quaisquer M e N, desde que seja definida a trajectória MN.

O conceito de Levi-Civita (que é aliás um dos infinitos modos possíveis de conferir ao espaço de riemann uma conexão euclidiana) veio sugerir um critério de sistematização dos espaços não homogéneos: o critério de transporte.»

...«O intento deste livro é classificar os transportes lineares e consequentemente as geometrias diferenciais a que eles servem de base, resumindo as recentes investigações de Weyl, Schouten, Struik, Blaschke, etc.

Desses transportes há alguns (como o transporte a fim de Eddington e o transporte conforme de Weyl) que já hoje têm uma utilização importante nas teorias relativistas».

Noutra motivação — continuação de trabalhos apresentados na tese de doutoramento, Março de 1911 — Mira Fernandes redigiu duas monografias que publicou sucessivamente em 1929 e 1931: **Grupos de Substituições e Resolubilidade Algébrica I e II:**

«Ampliando, em termos de maior minúcia, os princípios da teoria dos grupos de substituições de ordem finita, que, em tempo, publiquei com o título de «Teorias de Galois»; e acrescentando-lhes os fundamentos da teoria da resolubilidade algébrica, para a qual o conceito de grupo é o principal instrumento de análise, este livro pretende apenas, pelo caminho mais curto e nos termos mais simples, expor sumariamente um dos mais belos e importantes capítulos da álgebra moderna. Não tem pretensões de tratado, mas somente modestos intuitos de iniciação.»

Em 1945-46 aparece a quinta monografia **«Geometria das distâncias»**. Cadernos de análise geral 13, 17 e 18 — Porto.

Todas estas monografias são importantes e se caracterizam pela originalidade do tratamento das matérias e pelos conceitos pessoais introduzidos. São obras que na época acompanhavam o progresso da fronteira do conhecimento.

Dessas monografias, no nosso modo de sentir, damos especial relevo aos **«Fundamentos da Geometria Diferencial dos Espaços Lineares»**.

É um assunto de hoje que se continua na sua aplicação e condicionamento formal da Teoria da Relatividade Geral.

De alguns trabalhos fundamentais que conhecemos nenhum tem a clareza e simplicidade de trato que o Professor Mira Fernandes confere nessa monografia aos Transportes Lineares.

Traduz-se do estrangeiro para português.

Os estudiosos ganhariam que esta monografia se traduzisse para uma língua acessível à comunidade científica internacional. É a nossa opinião.

Nesta matéria transcrevemos do Professor Vicente Gonçalves as seguintes passagens:

«A data da publicação dos Fundamentos, Mira Fernandes era já um diligente e seguro investigador em Geometria diferencial, disciplina a que o atraíra o fascínio das Lezioni de Bianchi e onde tão felizmente se estreara com o trabalho Curvatura associada/Significado geométrico e algumas propriedades desse conceito, lido em Coimbra no Congresso misto das Associações Portuguesa e Espanhola para o Progresso das Ciências (1925) e pela primeira vez publicado no vol. XIII da Revista do Instituto Superior do Comércio de Lisboa (1925). Mira Fernandes dá nesse trabalho a interpretação geométrica do conceito geral de curvatura associada introduzido por Bianchi, questão tratada por Lipka em um caso particular; generaliza uma proposição de Vitali para subespaços geodésicos estuda o ângulo de duas direcções variáveis (no sentido de Levi-Civita) ao longo de uma curva, ligando-o às curvaturas associadas a essas direcções pela fórmula das duas curvaturas, que nesse trabalho estabelece e de que faz por fim interessantes aplicações.

Esta fórmula fundamental, ampla generalização de outra que Levi-Civita descobrira e as Lezioni haviam já divulgado, foi a origem de cordeal e prolongado comércio epistolar entre Mira Fernandes e Levi-Civita. A partir de 1928, Mira Fernandes consigna suas mais elevadas investigações à Academia dos Linces, onde em regra o grande mestre italiano pessoalmente as apresenta. Como instrumento que se maneia ou conhecimento que oportunamente se lembra, a fórmula propiciadora reaparece nas três primeiras comunicações.

A colaboração prossegue com notável assiduidade, cobrindo versatilmente temas de Análise, Geometria, Mecânica e Física matemática e compreendia nada mais nada menos de dezassete comunicações quando atingiu seu termo em 1938. O Dr. António Aniceto Monteiro teve a louvável iniciativa de as reproduzir dos Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei para a Portugaliae Mathematica, que acabava de fundar.»

* * *

Como diz Vicente Gonçalves *«a partir de 1927 quase todos os trabalhos científicos ou literários de Mira Fernandes foram inicialmente publicados ou ulteriormente reproduzidos na Técnica»*.

Prestamos homenagem à Técnica pela acção que desempenhou e desempenha.

Colocamo-nos incondicionalmente ao seu lado, como realidade que há que acarinhar e prolongar.

Agradecemos a honra de nos ter convidado para escrever esta memória.

Convite que aceitámos na legitimidade que nos advém de, em qualquer circunstância com que deparamos e onde fosse oportuno e justo, referir, anunciar e respeitar o Professor Mira Fernandes.

Oferecê-lo como exemplo possível, e em Portugal, de estudiosos ou tão simplesmente estudantes.

É impossível destacar, pela razoável dimensão que se deve impor a esta memória, passagens de todas as publicações efectivadas na *Técnica*.

Salientaremos o que, no nosso subjectivismo, mais contribua para o esclarecimento de quem recordamos.

O Professor Mira Fernandes aparece na *Técnica*, pela primeira vez, em Fevereiro de 1927, no n.º 7 da recém-criada revista e com um trabalho intitulado **«Forças Interiores»**. Trata-se da generalização de um teorema de Cisotti.

«Como é sabido chama-se virial duma força F, relativo a uma origem O, ao produto interno $F \mid (P-O)$... *A função W é a soma do virial interno com a energia interna; é uma constante, no caso dum sólido indeformável, com forças interiores helmholtzianas.»*

Em 1951 nas *Técnicas* 209 e 210 sob o título de «**Bodas de Prata**», dizia e lembrava assim:

«Comemora esta revista os seus vinte e cinco anos de existência. Seu colaborador desde os primeiros números, com relativa assiduidade, sempre com devoção e agradecimento pelo agasalho recebido, interessado nos seus progressos e satisfeito com os seus triunfos, é-me grata a incumbência de me associar a esta celebração, como testemunha do seu labor e confidente do seu viver.»

... ...

«O meu intento é recordar que, sendo a Técnica, *pelo nome e pelos apelidos, uma revista de engenharia, nunca os seus dirigentes se esqueceram de que ela é, também, uma revista escolar; e, como tal, devendo dar albergue e guarida, quando pareçam merecidos, a todos os temas relacionados com os domínios científicos que na escola se professam.»*

... ...

Em Fevereiro de 1928 — *Técnica* n.º 11 — publica uma «**Oração de Sapientia**»:

«E o auxílio à obra da educação nacional dificilmente será excedido em nobreza, porque é de todos o que tem maior poder preventivo da desventura e mais largo alcance de beleza moral. Saibam convencer-se aqueles a quem sobejam as riquezas da terra de que todos os defeitos, que a insuficiência económica do Estado possa trazer à causa do ensino, são, a breve trecho, descontados na valorização dos seus haveres.»

Terminava assim a sua exposição.

Em Dezembro de 1928, na *Técnica* n.º 16, figura a comunicação apresentada na Academia das Ciências de Lisboa «**O espírito matemático e a Cultura Geral**» de onde destacamos:

... *«O interesse pela cultura matemática cria-se ainda pela sistematização criteriosa dos programas de ensino. Ele é tanto maior quanto mais cedo e com maior acerto esses programas promoverem a elucidação daquelas verdades matemáticas que realmente governam o mundo; porque há muitas cujo valor é meramente histórico, relíquias venerandas duma respeitável escolástica, outras cujo valor é, por enquanto, apenas especulativo e doutrinário, componentes de teorias cuja utilização ainda se não iniciou, como instrumento de progresso das Ciências aplicadas. Estas, importa ao matemático conhecê-las, cultivá-las, com aquele desinteressado espírito de curiosidade científica, apanágio dos grandes percursores, que tem sido o principal factor da notabilitação da sciência; mas o seu conhecimento, para a formação da cultura geral e para a criação do espírito matemático, não é urgente, nem sequer indispensável»* ...

Em Fevereiro de 1929, na *Técnica* n.º 18, **O princípio de Hertz** de onde convém salientar:

«Este princípio é análogo ao da curvatura mínima de Hertz (Vide, por exemplo, Lezioni di meccanica razionale de Levi-Civita e U. Amaldi, Vol. II parte 2.ª, pág. 489) habitualmente deduzido do princípio da mínima constricção de Gauss. O enunciado que atrás deixo exposto, referido à multiplicidade V_n dos parâmetros lagrangeanos, tem, porém, as seguintes vantagens:

1.º — Deduz-se directamente, sem recurso ao princípio de Gauss.

2.º — Afirma que o mínimo da curvatura, correspondente à trajectória dinâmica em V_n, é zero.

3.º — A multiplicidade a que ele se refere depende apenas das coordenadas lagrangeanas e não do número de pontos do sistema.» ...

Em Maio de 1929, *Técnica* 21, anuncia e demonstra «**Uma propriedade do elipsoide de Clebsch**».
Em Janeiro de 1930, na *Técnica* n.º 24, procede a uma «**Generalização dum teorema de Crofton**».
Em Abril de 1930, *Técnica* n.º 27, escreve «**Sobre o momento gradiante de fase**» que termina assim:

... É fácil de ver que, nos limites de aplicação das fórmulas de Broglie (ou da mecânica clássica)

$$p = y = y_1$$

Não sabemos se esta relação tão simples já foi algures apontada.»

Em Dezembro de 1930, *Técnica* n.º 31, «**Sobre a derivação parcial do tensor fundamental**» que termina do modo seguinte:

...*«Se as notações da derivação covariante parcial não fossem, a todos os títulos, preferíveis à notação imperfeita de Christoffel, seria de aconselhar, por virtude da segunda fórmula 1'), a creação dum símbolo de Christoffel de 3.ª espécie, para representar a* $\begin{matrix}(i)k\\ /i\end{matrix}$.

Em Novembro de 1931, Técnica n.º 38, **«Curvatura linear»**.

«A análise das singularidades que podem apresentar os conceitos fundamentais da geometria dos espaços de Riemann, quando os coeficientes da forma diferencial quadrática, que define a métrica, não são funções regulares das coordenadas, está quase completamente por fazer. Numa Nota das suas «Leçons sur la geométrie des espaces de Riemann» o Prof. Cartan examina uma hipótese de singularidade dos referidos coeficientes que o conduz, nos espaços riemannianos a três dimensões, ao conceito de curvatura linear do espaço; conceito que generaliza, nesse caso singular, o da curvatura riemanniana ordinária que é, como se sabe, superficial (?).

É objecto desta Nota seguindo de perto o raciocínio de Cartan, estabelecer um conceito semelhante para as superfícies do espaço ordinário»...

Em Janeiro de 1932, Técnica n.º 40, **«Um problema de análise»**.

«Problema — Dado um volume V, chamando A(x) à área (função da variável x) nele intersectada por um plano variável normal ao eixo dos xx, e sendo $I = \iint_A f(x,y,z)\,dA$, *determinar as condições a que devem satisfazer a função f(x, y, z) (suposta integrável e derivável) e o volume V, para que seja*

$$\frac{dI}{dx} = \iint_A \frac{\partial f}{\partial x}\,dA\ \text{».}$$

Refere no fim deste trabalho uma aplicação à teoria dos jactos líquidos.

Em Novembro e Dezembro de 1932 — Técnica n.ºs 46 e 47, **«Evolução do Conceito de Grupo»** — Conferência realizada na Universidade de Coimbra, na comemoração do 1.º centenário da morte de Evaristo Galois.

Em Março... Junho de 1933 — Técnica n.ºs 50, 51, 52 e 53 — **Modernas concepções da Mecânica.**

Publicação integral das lições que Mira Fernandes realizou no Instituto de Altos Estudos, da Academia das Ciências de Lisboa.

Daí se transcreve:

...*«Dou por finda, meus senhores, esta breve alusão às doutrinas do passado...*

...*«Propus-me expor, num pequeno número de lições, as ideias gerais que neste momento dominam a teoria relativista e a mecânica quântica...*

Termina deste modo:

...*«Mais um testemunho ineludível da harmoniosa subordinação das leis às premissas do entendimento. Aquele entendimento cujas asas tiveram, no dizer de Sócrates, o abrolhar inquieto da dentição infantil; e cujo voo, ora hesitante, ora sereno e firme, tem como destino a verdade e como galardão a glória da sua mesma existência».*

Este curso renasce e desenvolve-se, mais tarde, na cadeira de Mecânica Racional.

Em Janeiro de 1934, Técnica n.º 56, **«Prémio Nobel da Física»**.

«Com o prémio Nobel da Física, de 1932 (que não fora concedido) e o do ano de 1933 foram, há pouco, galardoados, Heisenberg, Schrödinger e Dirac...» Que fizeram os premiados?

«Pois bem, Heisenberg, Schrödinger e Dirac (não contando Broglie, Nobel de 1929) são os principais construtores desse gigantesco monumento que, embora incompleto, tem na sua base alguma coisa de definitivo e firme: os quanta»...

Em Maio de 1934, Técnica n.º 60, **«A teoria das equações diferenciais e a ciência francesa»**.

Conferência feita na Universidade Técnica de Lisboa, em 7 de Maio de 1934.

Trata-se de uma análise crítica profunda da contribuição de diversos matemáticos e de uma síntese notável sobre equações diferenciais.

...*«A teoria das equações diferenciais, nas suas aplicações à Mecânica e à Física, tem procurado, nos últimos anos, pela necessidade de explicar os fenómenos infra-atómicos, uma ligação cada vez mais estreita, mais crítica e mais forte com a teoria dos grupos. Esta fornece o aspecto qualitativo dos fenómenos que a equação diferencial traduz nas suas relações infinitesimais, e a que a sua integração, sempre difícil, se não impossível, daria uma determinação quantitativa»...*

Em Dezembro de 1934 e Janeiro de 1935, Técnica n.os 62 e 63, **«Distância e Vizinhança»**.

Conferência realizada no dia 26 de Novembro de 1934 na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Desta publicação diz a Técnica:

«Como sempre: a ciência aliada a uma grande clareza de exposição e a um notável poder de síntese».

Além da importância do assunto e da sua permanente actualidade, o comentário diz tudo.

Em Março de 1935, Técnica n.º 65, **«Derivação tensorial composta nos espaços não pontuais»**.

Trabalho notável. Versão em português da comunicação apresentada à Academia dos Linces **«Derivazione tensoriale composta nagli spazi non pontuali»**.

Em Janeiro de 1936, Técnica n.º 71, **«Mecânica e Geometria»**.

...*«Em resumo:*

A subordinação das geometrias kleinianas às geometrias dos espaços heterogéneos (ou a inversa) e a redução de toda a concepção ondulatória a uma concepção pontual, no espaço de funções de onda, sempre hilbertiano, vem alargar ainda mais os domínios de validade do princípio variacional, como lei geral da mecânica.

Não apenas nos espaços geométricos (aos quais se refere a análise de Milner) mas também nos espaços abstractos, que ele permite seleccionar, de harmonia com as conveniências da teoria mecânica, forma espacial mais adequada à representação dos fenómenos.

E, se a selecção é quase sempre difícil, essa dificuldade nunca deixou de ser, em todas as teorias, a mais grave preocupação do raciocínio matemático».

Em Agosto de 1936, Técnica n.º 78, **«Em 25 anos»**.

Palestra feita no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, em 29 de Maio de 1936, a convite da Associação Académica.

...*«Os últimos 25 anos são um domínio de condensações de singularidades; tais e tantas têm sido, no último quarto do século, as inquietações do pensamento científico»...*

Em Novembro de 1936, Técnica n.º 79, **«Evolução do Cálculo Variacional. (No bi-centenário de Lagrange»)**.

Termina assim:

«Aperfeiçoaram-se os métodos, alargaram-se os campos, disciplinou-se a doutrina, pari passu com o vertiginoso progredir da análise matemática, nos últimos cem anos. Mas a concepção inicial ficou. Mais ainda: revelou imprevistas possibilidades, dirimiu contendas, ajustou teorias, orientou críticas. Esclareceu, dirigiu e unificou.

Foi norma e foi penhor. Foi lei e foi juiz. Bem haja a memória de Lagrange!»

* * *

Para não alongar esta memória, definidos que são os interesses científicos do Professor Mira Fernandes, retomaremos apenas alguns dos seu trabalhos mais recentes.

* * *

Em Fevereiro de 1950, Técnica n.º 199. **«Transportes Finitos»**.

«Na definição duma conexão afim, não infinitesimal, numa variedade V_n $(x^1, x^2 \ldots x^n)$, *o Prof. Einstein (1) utiliza bivectores cujas componentes são funções das coordenadas de dois pontos da variedade, extremos do transporte, e não apenas dum só ponto, como as do tensor métrico de Riemann»...*

«9') Vimos no § 6 que as equações 17), como diz o Prof. Einstein, devem ser rejeitadas como equações do campo, porque dependem de três pontos do espaço e são escalares; ao passo que as variáveis $(g^{\alpha}_{k})^{i}_{\alpha}$ *dependem de dois pontos do espaço e são bivectores.*

As nossas equações 22) satisfazem às condições desejadas: os seus segundos membros (e, portanto, os primeiros) dependem de dois pontos do espaço (α *e* γ*) e são bivectores.*

Podem, portanto, ser tomadas como equações do campo».

Trata-se de um trabalho notável de onde, nomeadamente, constam algumas observações a trabalho recente de Einstein.

Em Abril de 1950, Técnica n.º 201, **«As geodésicas dos espaços unitários»**.

...«*Podemos então, atendendo a 16) e 20) (ou a 16' e 20') enunciar o seguinte:*

Teorema — Dados dois espaços unitários K_n *e* K'_n, *se existir um vector* (r_υ) *satisfazendo às equações* 16) e 16)', esses espaços têm o mesmo tensor de torsão $\left(S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\upsilon} \right)$. *Se esse tensor satisfazer às equações 20), com um determinado vector* (s_υ), *os dois espaços têm geodésicas correspondentes.*»

Em Janeiro de 1953, Técnica n.º 228, «**Uma generalização da série de Fourier**».

...«*A série B) é a série de Fourier*

A série A) tem, para as funções periódicas a mesma generalidade da série de Gomes Teixeira, da qual é uma transformada (no caso em que o domínio é uma coroa circular).

A série B) de Fourier é um caso particular da série A), como a série de Laurent (da qual é uma transformada) é um caso particular da série de Gomes Teixeira»...

* * *

Julho de 1955, Técnica n.º 254, último trabalho publicado por Mira Fernandes na Revista Técnica «**As geodésicas na definição das curvaturas duma superfície**».

A três anos da sua morte, termina sem saber, a sua colaboração na Técnica onde publicou trabalhos sempre servidos pelo espírito do investigador e do pensador e pela harmonia do homem justo e lúcido que era.

Sem saber, porque o último trabalho recenseado data de 1957, e ele continuaria como sempre a colaborar com a Técnica.

Terminou a sua colaboração na Técnica com um assunto que lhe era grato, num domínio onde deu ao conhecimento actual poderosas contribuições: a Geometria Diferencial, no seu contexto próprio e nas suas aplicações à Física Matemática.

Todos os trabalhos referidos constam da Bibliografia de A. de Mira Fernandes que figura no início do 1.º Volume das Obras Completas de Aureliano Mira Fernandes — Lisboa — Edição publicada pelo Centro de Estudos de Estatística Económica do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Lisboa — 1971.

Esta obra é introduzida pelo Professor Vicente Gonçalves como já se salientou.

* * *

Terminamos com algumas transcrições do artigo **Bodas de Prata**, publicado na Técnica n.º 85:

«*Fez vinte cinco anos, em 13 de Novembro findo, o Instituto Superior Técnico, no exercício da sua missão docente, se não nos textos da lei que lhe conferiam existência e personalidade*».

... ...

«*A pobreza da suas instalações, a miséria dos seus recursos materiais, a hostilidade surda ou expressa dos interesses criados (uma ou outra vez sob disfarce de direitos adquiridos); a descrença de muitos, a indiferença do maior número; nada impediu que o Instituto, numa rápida afirmação de vitalidade, ocupasse, a breve trecho da sua criação, um lugar de honrosa referência, no elenco das escolas superiores do País*». *Porquê?*

... ...

...«*Em que medida e de que maneira contribuiram, para tão feliz resultado, a posse efectiva e o uso prudente e judicioso duma ampla autonomia, administrativa e pedagógica, sob a discreta superintendência do Estado?*

Até que ponto concorreram para o engrandecimento da Escola, a personalidade e flexibilidade dos programas, orientadas no sentido dum máximo rendimento do ensino?

Quanto deve o conseguimento dessa comunhão de ideias a que atrás aludo, ao espírito de colaboração entre professores e alunos, por todos manifestado e cultivado, desde a primeira hora, promovendo iniciativas, suscitando curiosidades, estimulando vocações; e creando, sobretudo, hábitos de trabalho e a confiança no próprio esforço?»

... ...

«*O Instituto Superior Técnico tem hoje uma casa; oxalá continue a ser um lar*».

Lisboa, Julho de 1978.

MANUEL JOSÉ DE ABREU FARO

C. D. U. 51.951

A Memória de Aureliano de Mira Fernandes

Conjuntos graduados de Zadeh

ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO

1 — INTRODUÇÃO

A noção de *conjunto graduado* foi introduzida por L. A. Zadeh [1965] (1), com o nome de *«Fuzzy Set»*. Em França dá-se o nome de *«ensemble flou»* a esta noção, mas preferimos a expressão: *«conjunto graduado»* introduzida por Gr. C. Moisil [1972] (1) (pág. 157-162).

Seja E um conjunto dado, não vazio, diz-se que o conjunto V é uma parte de E se todo elemento de V é um elemento de E e então escreve-se $V \subseteq E$.

É usual em matemática substituir o conjunto V pela sua *função característica* $K_v(x)$ definida do seguinte modo: K_v é uma aplicação do conjunto E no conjunto {0,1}, formado pelos dois números reais 0 e 1, definida do modo seguinte

$$K_v(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in V \\ 0 \text{ se } x \bar{\in} V \end{cases}$$

É claro que o conhecimento da aplicação $K_v(x)$ determina univocamente o conjunto V, que é o conjunto de todos os pontos x de E tais que $K_v(x) = 1$.

Zadeh substituiu o conjunto {0,1}, pelo conjunto de todos os números reais x tais que $0 \leqslant x \leqslant 1$, que representaremos pela notação [0,1] e dá o nome de conjunto graduado F a toda aplicação f de E em [0,1].

Podemos pensar no conjunto [0,1] com um conjunto de *valores lógicos*, 0 representa o valor lógico *falso* e 1 o valor lógico *verdadeiro*. Se $0 < \lambda < 1$; λ é um valor lógico intermédio. Representaremos a expressão «o ponto p pertence ao *conjunto graduado* F» pela notação

$$p \epsilon F \qquad (1)$$

Então o valor lógico do enunciado (1), em notação $v(p \epsilon F)$, será definido pela fórmula

$$v(p \epsilon F) = f(p)$$

Para indicar que um ponto p pertence ao *conjunto X* escreve-se $p \in X$.

Assim os dois símbolos $\in$ e ϵ representam relações distintas.

Comparando com o caso anterior podemos dizer que *f é a função característica do conjunto graduado F* e podemos, no fundo, identificar F e f.

Se $v(x \epsilon F) = 1$ diremos que o enunciado «$x \epsilon F$» é verdadeiro.

Se $v(x \epsilon F) = 0$ diremos que o enunciado «$x \epsilon F$» é falso.

Se $v(x \epsilon F) = f(p) = \lambda$ diremos que o enunciado «$x \epsilon F$» tem o valor lógico λ ou que merece o *grau de confiança* λ.

Se f não toma valores distintos de 0 e 1 estamos reduzidos ao caso precedente.

Esta ideia de tomar como conjunto dos valores lógicos o segmento [0,1] foi apresentada pela primeira vez pelo matemático polaco J. Lukasiewicz antes de 1930(2); para uma exposição sobre vários cálculos proposicionais polivalentes considerados por este autor ver Lukasiewicz — Tarski [1930].

Como o segmento [0,1] é o conjunto de todos os valores lógicos, é necessário definir os conectivos $\wedge$ (e), $\vee$(ou) e $\sim$ (negação) sobre [0,1].

As definições de Zadeh são as seguintes:

$$a \wedge b = \min. \{a, b\}$$
$$a \vee b = \max \{a, b\}$$
$$\sim a = 1 - a$$

Seja

$$Z = [0,1]^E$$

o conjunto de todas as aplicações de E em [0,1]. Se $f, g \in Z$ escreveremos $f = g$ para indicar que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E$. Definiremos a função $h = f \wedge g$ pela fórmula

(1) Ver a lista bibliográfica no fim deste artigo.

(2) Mas este autor considera (além dos conectivos $\vee$, $\wedge$, $\sim$ definidos a seguir) o conectivo de implicação definido por $a \rightarrow b = \min \{1, 1 - a + b\}$.

$$h(x) = f(x) \wedge g(x) \qquad (1)$$

e $l = f \vee g$ por

$$l(x) = f(x) \vee g(x) \qquad (2)$$

e a negação de f (em notação $\sim f$) por

$$(\sim f)\ (x) = 1 - f(x) \qquad (3)$$

As definições (1) (2) (3) podem escrever-se sob a forma

$$(1')\quad (f \wedge g)\ (x) = f(x) \wedge g(x)$$
$$(2')\quad (f \vee g)\ (x) = f(x) \vee g(x)$$
$$(3')\quad (\sim f)\ (x) = \sim f\ (x)$$

A função identicamente igual a 1 será representada pelo símbolo **1** e a função identicamente igual a 0 será representada pelo símbolo **0**, isto é

$$\mathbf{1}\ (x) = 1 \quad \text{para todo } x \in E$$
$$\mathbf{0}\ (x) = 0 \quad \text{para todo } x \in E$$

Obtemos assim um sistema $< \mathbf{Z}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \wedge, \vee, \sim)$ donde **0** e **1** são dois elementos de **Z**, $\wedge$ e $\vee$ duas operações binariais definidas sobre **Z** e $\sim$ uma operação unária definida sobre **Z**.

Queremos estudar as propriedades algébricas do sistema **Z**. Para isso necessitamos recordar algumas noções da teoria dos reticulados e em particular dos reticulados distributivos, das álgebras de Morgan e de Kleene, que facilitem a leitura dos trabalhos indicados na bibliografia.

Este artigo deve ser considerado como uma iniciação à teoria dos conjuntos graduados de Zadeh, *considerados sob o ponto de vista da álgebra*, quando são algebrizados por meio das operações $\vee$, $\wedge$ e $\sim$. Mas é claro que sobre o segmento [0,1] podem defenir-se outras operações.

De Kerf (J. L. F.) [1975] coligiu uma lista de 200 referências bibliográficas sobre os conjuntos graduados na qual figuram 31 trabalhos de Zadeh. Veja também os 3 volumes publicados por Kaufman (A.) [1975], onde figuram numerosas aplicações.

O *problema fundamental* de determinar um conjunto finito de igualdades válidas em toda álgebra **Z**, a partir das quais seja possível demonstrar todas as outras igualdades válidas em todas essas álgebras foi resolvido por J. Kalman [1958] (como veremos no § 6). Os resultados de J. Kalman que têm um interesse decisivo para a teoria algébrica dos conjuntos graduados, foram apresentados na sua Tese de Doutoramento na Universidade de Harvard, em 1955.

O segundo *problema fundamental* de encontrar um procedimento para decidir com um número finito de cálculos se uma igualdade dada é ou não válida em todas as álgebras **Z** foi também resolvido por J. Kalman na sua Tese.

A exposição destes resultados fundamentais é um dos objectivos centrais desta nota. Veremos assim que 10 anos antes da introducão da noção de conjunto graduado, já estavam elaboradas as técnicas e obtidos os resultados adequados para o estudo dos conjuntos graduados sob o ponto de vista da álgebra. Este facto passou desapercebido durante bastante tempo. Certos erros cometidos têm a sua origem nesta circunstância.

Finalmente corresponde assinalar que St. Kleene tinha considerado em [1938] um cálculo proposicional trivalente, com três valores lógicos o 0 (falso), ½ (indecidível), 1 (verdadeiro). Sobre o conjunto $M_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ estavam definidas duas operações binárias v (ou), $\wedge$ (e) e uma operação unária $\sim$ (negação) definidos por meio das tábuas correspondentes e estava pendente o problema de caracterizar esta álgebra finita por meio de igualdades.

Este problema foi resolvido também por J. Kalman e este resultado tem muita importância na teoria dos conjuntos graduados, visto que M_3 é uma álgebra característica com respeito às álgebras **Z**, isto é, *uma igualdade é válida em todas as álgebras* **Z** *se e só se* ela for válida em M_3.

Y. Gentillome [1967] [1968], tendo em vista aplicações à linguística foi levado a definir a noção do conjunto vago X como um par $X = (X_1, X_2)$ de subconjuntos X_1, X_2 de um universo E, tais que $X_1 \subseteq X_2$, algebrizando os conjuntos vagos em forma adequada que será indicada no § 7.

Gr. C. Moisil [1940], [1941] tinha sido levado a introduzir uma construção análoga no estudo do cálculo proposicional trivalente de Lukasiewicz.

Indicaremos a estreitas relações entre esta noção e a teoria dos conjuntos graduados.

A história da matemática mostra neste caso, como em tantos outros, a enorme importância que tem a investigação fundamental, para as aplicações da matemática e reciprocamente.

Sob este ponto de vista, a vida do falecido e prestigioso investigador Aureliano de Mira Fernandes é um exemplo digno do nosso respeito e admiração. Foi professor de uma importante escola de Engenharia, o Instituto Superior Técnico de Lisboa e do I. S. C. E. F., mas paralelamente às suas funções de Professor, dedicava a maior parte do seu tempo disponível a realizar trabalhos de investigação em matemática pura, ou a realizar cursos de especialização, sobre o mesmo tema, para alguns dos seus discípulos.

Na minha juventude, quando se queria prestigiar o Instituto Superior Técnico, sempre se dizia «*tem como Professor o Aureliano de Mira Fernandes*» considerando-se esta afirmação como a indicação de um Homem exemplar, que todos respeitávamos e admirávamos, porque a sua dedicação à investigação no campo das matemáticas puras, honrava o espírito humano.

Jean Perrin, prêmio Nobel de Física, quando na década de 30, creio eu, lutava para criar a «Caisse National de la Recherche», tinha que convencer da

sua utilidade numerosas pessoas, que tinham o poder de decisão mas não o poder de compreensão, sempre lhes dizia «*A ciência pura, é aquela que não tem ainda aplicações*». Este artigo, redactado em homenagem à memória de Aurealiano de Mira Fernandes, tem por objectivo fundamental, ilustrar esta tese mostrando a evolução das ideias em torno da noção de conjunto graduado de Zadeh a partir do ano de 1938. Devemos também assinalar que a noção de *reticulado* data pelo menos de 1897 com R. Dedekind.

2 — CONJUNTOS ORDENADOS E RETICULADOS

Uma relação binária $\leq$ definida sobre um conjunto A diz-se uma relação de ordem se verificar as propriedades seguintes:

01 — *Reflexiva:* $x \leq x$

02 — *Antisimétrica:* se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $= y$

03 — *Transitiva:* Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq$ e

Escreveremos $x < y$ para indicar que $x \leq y$ e $x \neq y$.

Diz-se que *um elemento y cobre o elemento* x se: 1.º) $x < y$; 2.º) Não existe nenhum elemento $z \varepsilon A$ tal que $x < z < y$.

O *Diagrama* de um conjunto ordenado A *finito* define-se do seguinte modo:

1.º) Cada elemento $a \varepsilon A$ representa-se por um pequeno círculo (no plano do papel) que se chama o afixo de a; 2.º) Se b cobre a o afixo de b coloca-se mais acima de a, ligando-se a e b por um segmento. Seja dado o conjunto A = (2, 3, 6) e ordenemos A pela relação *divide* (que representaremos pela notação $\leq$). A relação *divide* entre números naturais é uma relação de ordem e o diagrama de A está indicado na Fig. 1. Dois elementos x y dizem-se incomparáveis se $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$. Na fig. 1, 2 e 3 são incomparáveis.

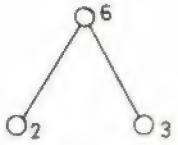


Fig. 1

Fig. 2

Se ordenamos A pela relação «*menor ou igual*» que se representaremos também pela notação $\leq$ então o diagrama de A está representado na figura 2. Na figura 3, está indicado o diagrama do conjunto. B = (1, 2, 3, 4, 6, 12), de todos divisores de 12, ordenado pela relação *divide*. Diz-se que *u* é último *elemento* de um conjunto ordenado A Se $a \leq u$, para todo $a \varepsilon A$. Se A tem último elemento então ele é único. Com efeito se u e u' são últimos elementos de A então $u \leq u'$ e $u' \leq u$ logo $u = u'$.

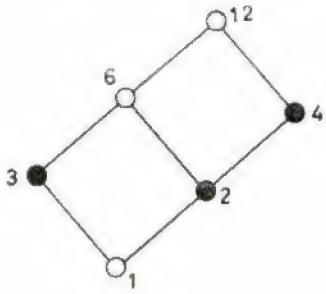


Fig. 3

Diz-se que p é primeiro elemento de A se $p \leq a$ para todo $a \varepsilon A$. Se A tem primeiro elemento ele é único.

O diagrama da Fig. 1 não tem primeiro elemento, 2 é primeiro elemento da Fig. 2, 1 é primeiro elemento da Fig. 3. 6 é o último elemento dos diagramas das Fig. 1 e 2, e 12 é o último elemento do diagrama da fig. 3.

Dados dois conjuntos ordenados $(A, \leq)$ $(A', \leq)$ diz-se que o segundo é isomorfo ao primeiro se existe uma transformação φ de A *sobre* A' tal que

1.º) φ é *biunivca.*

2.º) Se $a, b \varepsilon A$ são tais que $a \leq b$ então $\varphi(a) \leq \leq \varphi(b)$.

3.º) Se $a, b \varepsilon A$ são tais que $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ então $a \leq b$. (1).

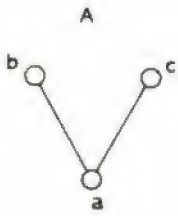


Fig. 4

Fig. 5

Sejam A e A' os conjuntos ordenados definidos pelos seus diagramas indicados nas fig. 4 e 5 e seja φ definida por $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$, $\varphi(c) = c'$.

As condições 1.º) e 2.º) são verificadas mas 3.º) não é verificada porque:

$\varphi(b) = b' \leq \varphi(c) = c'$ e não se tem $b \leq c$.

A teoria dos conjuntos ordenados tem por objectivo o estudo das propriedades dos conjuntos ordenados que se mantêm invariantes por isomorfismo. Dois conjuntos ordenados isomorfos A e A' podem diferir apenas pela natureza dos seus elementos.

Para indicar exemplos de conjuntos ordenados basta indicar um diagrama ao acaso. Dados dois ele-

(1) É fácil de ver que se A' é isomorfo a A, então A é isomorfo a A'. Podemos por iso dizer que A e A' são isomorfos.

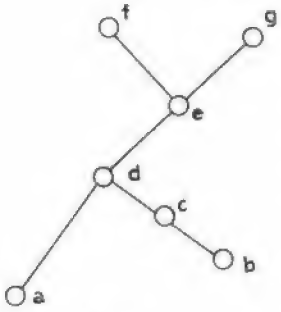


Fig. 6

mentos x, y de um diagrama para que seja $x \leq y$ é necessário e suficiente que seja $x = y$ ou que exista um «caminho» ascendente que parta de x e chegue a y. Assim na figura 4, $a \leq d$, $a \leq e$, $a \leq f$, $a \leq g$, $b \leq c$, $b \leq d$, $b \leq e$, $b \leq f$, $b \leq g$, $c \leq d$, $c \leq e$, $c \leq f$, $c \leq g$, $d \leq e$, $d \leq f$, $d \leq g$, $e \leq f$, $e \leq g$ e além disso $a \leq a$, $b \leq b$, $d \leq d$, $e \leq e$, $f \leq f$, $c \leq c$, $g \leq g$.

Muitas vezes o primeiro e último elemento de um conjunto ordenado A representam-se por 0 e 1. Esta notação não é adequada para as figura 2 e 3.

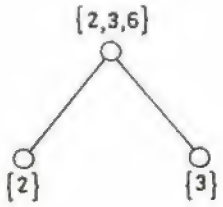
O exemplo mais importante de um conjunto ordenado é uma família A de conjuntos ordenados pela relação de inclusão $\subseteq$. A razão desta afirmação é a seguinte:

2.1 — *TEOREMA. Dado um conjunto ordenado* $(A, \leq)$ *existe uma família A' de conjuntos, ordenados pela relação de inclusão* $\subseteq$ *tal que os conjuntos ordenados* $(A, \leq)$ *e* $(A', \subseteq)$ *são isomorfos.*

DEM. Dado $a \varepsilon A$ seja $f(a)$ o conjunto de todos os elementos de A tais que $x \leq a$. Então $f(a)$ é um sub-conjuntos de A.

Seja $A' = \{f(a) : a \varepsilon A\}$ e ordenemos A' pela relação de inclusão $\subseteq$. Verifica-se imediatamente que $(A', \subseteq)$ é isomorfo a $(A, \leq)$.

Para o caso da figura 4 o diagrama de A' é



2.2 — *DEFINIÇÃO. Diz-se que c é o ínfimo do par ordenado (a, b) de elementos de um conjunto ordenado A se:*

I 1.º) $c \leq a$ *e* $c \leq b$

I 2.º) *Se* x *é tal que* $x \leq a$ *e* $x \leq b$ *então* $x \leq c$.

Se a e b têm um ínfimo ele é único.

Se assim é escreve-se $c = a \wedge b$.

A condição 1.º) pode expressar-se dizendo que c é uma *cota inferior* de a e b, e a condição 2.º) expressa que c é a maior das cotas inferiores de a e b.

Na figura 6 tem-se $e = f \wedge g$.

2.3 — *DEFINIÇÃO. Diz-se que c é o supremo do par ordenado* (a, b) *de elementos de um conjunto ordenado A se*

S 1.º) $a \leq c$ *e* $b \leq c$.

S 2.º) *Se* $a \leq x$ *e* $b \leq x$ *então* $c \leq x$; então escreveremos $c = a \vee b$.

Se a e b tem um supremo ele é unico.

2.4 — *DEFINIÇÃO. Um conjunto ordenado A diz-se um reticulado si* $a \wedge b$ *e* $a \vee b$ *existem para todo par ordenado* (a b) *de elementos de A.*

É bem conhecida que

2.5 — *TEOREMA. Num reticulado A valem as seguintes regras de cálculo:*

(R1) $a \wedge a = a$

(R2) $a \wedge b = b \wedge a$

(R3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

(R4) $a = a \vee (a \wedge b)$

(R1') $a = a \vee a$

(R2') $a \vee b = b \vee a$

(R3') $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

(R4') $a = a \wedge (a \vee b)$

Reciprocamente se $(A, \wedge, \vee)$ *é um sistema formado por um conjunto, não vazio, A e duas operações binárias* $\wedge$ *e* $\vee$ *definidas sobre A que verificam as igualdades* (R1) — (R4) e (R1') — (R4') *então é possível definir sobre A uma relação de ordem* $\leq$ *tal que:* 1.º) $a \wedge b$ *é o ínfimo de* a *e* b; 2.º) $a \vee b$ *é o supremo de* a *e* b.

A relação de ordem buscada pode definir-se do seguinte modo: $x \leq y$ se e só se $x = x \wedge y$.

Para a demonstração de este resultado veja-se por exemplo Garrett Birkhoff [1948] (*).

2.6 — *DEFINIÇÃO. Um reticulado* $(A, \wedge, \vee)$ *diz-se distributivo se*

(D) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Existem reticulados que não são distributivos. É o que acontece com o reticulado A que tem por diagrama a Fig. 7.

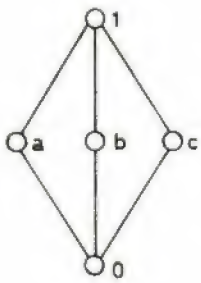


Fig. 7

Com efeito

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) =$
$= o \vee o = o$

logo A não é distributivo. Em todo reticulado distributivo vale também a regra de cálculo

(D') $x \vee (y \wedge z) =$
$= (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

(*) Aos símbolos $\vee$ e $\wedge$ podemos dar o nome de **«verso»** e **«reverso»** (em inglês **«cup»** e **«cap»**).

2.7 — *LEMA. Para que um reticulado* (A, $\wedge$, $\vee$) *tenha primeiro* (0) *e último* (1) *elementos é necessário e suficiente que existam dois elementos* 0,1 ε A *tais que*

$$0 \wedge x = 0 \qquad 1 \vee x = 1$$

para todo x ε A, *ou o que é equivalente*

$$0 \vee x = x \qquad 1 \wedge x = x$$

2.8 — *DEFINIÇÃO. Um conjunto ordenado* A *diz-se totalmente ordenado se* 04) *Para todo par* (x, y) *ou* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$.

2.9 — *TEOREMA. Todo conjunto* A *totalmente ordenado* A *é um reticulado distributivo.*

Com efeito: se $x \leq y$ então $x = x \wedge y$ e $x \vee y = y$; se $y \leq x$ teremos $y = y \wedge x$ e $x \vee y = x$. Portanto A é um reticulado. Vejamos que A é um reticulado distributivo. Com efeito dados 3 elementos x, y, z ε A verifica-se uma só das condições:

1.º) $x \leq y \leq z$
2.º) $x \leq z \leq y$
3.º) $y \leq x \leq z$
4.º) $y \leq z \leq x$
5.º) $z \leq x \leq y$
6.º) $z \leq y \leq x$.

No primeiro caso teremos

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \vee x = x$$

e a igualdade D é verificada.

Nos restantes casos a verificação é análoga.

2.10 — *COROLÁRIO. O segmento* [0,1] *com a sua ordem natural é um reticulado distributivo.*

Basta notar que [0,1] com a sua ordem natural é um conjunto totalmente ordenado.

Um exemplo muito importante de reticulado distributivo é o que se indica a seguir.

2.11 — *DEFINIÇÃO. Uma família A conjuntos tal que se* X ε *A e* Y ε *A então* X $\cap$ Y ε *A e* X $\cup$ Y ε *A dá-se o nome de anel de conjuntos.*

Verifica-se facilmente que

2.12 — *Um anel de conjuntos é um reticulado distributivo.*

Veremos mais adiante que se trata do exemplo mais importante de reticulado distributivo.

Indiquemos uma construção que permite obter reticulados distributivos a partir de reticulados distributivos dados.

2.11 — *DEFINIÇÃO. Seja* $\{A\}_{i \varepsilon I}$ *uma família de reticulados (distributivos) e seja*

$$P = \prod_{i \varepsilon I} A_i$$

o produto cartesiano dos conjuntos A_i. *Para representar um elemento* p ε P *usaremos a notação* $p = (p_i)_{i \varepsilon I} = (p_i)$ *donde* $p_i \varepsilon A_i$ (para i ε I) *chama-se a coordenada de índice* i *do ponto* p ε A.

Se $p = (p_i)$ ε A *e* $q = (q_i)$ ε A

Poremos $p \wedge q = (p_i \wedge q_i)$
$p \vee q = (p_i \vee q_i)$

Verifica-se imediatamente que valem as regras de cálculo (R1—R4), (R1'—4') *e* (D); *logo* (A, $\wedge$, $\vee$) *é um reticulado (distributivo).*

Se todos os A_i têm prmeiro elemento O_i então P tem como primeiro elemento $O = (O_i)$.

Se todos os A_i têm último elemento 1_i então P tem por último elemento $1 = (1_i)$.

No caso particular em que todos os A_i são iguais ($A_i = A$) escreveremos

$$P = A^I$$

que é o conjunto de todas *as aplicações* f *de* I *em* A, com $f(i) = a_i$ ε A.

Neste caso podemos escrever $p = (p_i)_{i \varepsilon I}$ onde $p_i = f(i) = a_i$ ε A.

Daqui resulta que P é um reticulado distributivo.

Suponhamos agora que A = [0,1] então a família de todos os conjuntos graduados considerados como aplicações de E em [0,1].

$$Z = [0,1]^E$$

é um reticulado distributivo.

Como o segmento [0,1] tem primeiro elemento 0 e último elemento 1; o mesmo acontece ao reticulado distributivo Z que são as funções identicamente iguais, respectivamente, a 0 e 1.

Dada uma relação binária R definida sobre um conjunto E dá-se o nome de relação dual de R à relação R* definida pela condição

x R* y se e só se y R x. É claro que R** = R.

A relação dual de $\leq$ costuma representar-se por $\geqslant$. Tem-se então o seguinte

PRINCIPIO DE DUALIDADE. A relação dual duma relação de ordem é uma relação de ordem.

Cada um dos conjuntos ordenados A e A* indicados na figura seguinte é dual do outro

É claro que a transformação $f(x) = x^*$ é um *anti-isomorfismo* de A *sobre* A* isto é, f é uma transformação biunívoca de A sobre A* tal que

A condição $x \leq y$ em A é equivalente a $y^* \leq x^*$ em A*.

A um anti-isomorfi f de A sobre A de período 2 ($f\ f(x) = x$) dá-se o nome de *involução*.

A noção de ínfimo é dual da noção de supremo.

3 — RETICULADOS DISTRIBUTIVOS FINITOS

Necessitamos que conhecer alguns resultados sobre os reticulados destributivos finitos A.

Um elemento $i \varepsilon A$ diz-se *irredutível* se $i \neq o$ e $i = a \vee b$ implica $i = a$ ou $i = b$. É fácil de provar o seguinte

3.1 — *TEOREMA. Para que um elemento* $i \neq o$ *de um reticulado finito A seja irredutível é necessário e suficiente que o conjunto* S *de todos os elementos* x *de* A *tais que* $x < i$ *tenha um último elemento.*

Aplicando este teorema ao reticulado distributivo A da fig. 3 vê-se que os elementos irredutíveis de A são 2, 3 e 4.

Um resultado importante é o seguinte

3.2 — *TEOREMA. Num reticulado finito A, com mais de um elemento, todo elemento* $a \neq o$ *é supremo de elementos irredutíveis* (Garrett Birkhoff).

Trata-se de um corolário do Teorema 4.5 que demonstraremos mais adiante.

No caso da fig. 7, os elementos irredutíveis são a, b, c; e $1 = a \vee b = a \vee c = b \vee c$.

Um elemento p de um reticulado finito A diz-se *primo* se 1.º) $p \neq o$; 2.º) se $p \leq a \vee b$ então ou $p \leq a$ ou $p \leq b$.

3.3 — *TEOREMA. Num reticulado finito todo elemento primo é irredutível* (G. Birkhoff).

Dem. Seja p primo e suponhamos que (1) $p = a \vee b$ então como p é primo teremos (2) $p \leq a$ ou (3) $p \leq b$. De (1) resulta (2') $a \leq p$ e (3') $b \leq p$. Se se verifica (2), usando (2'), teremos $p = a$. Se se verifica (3'), usando (3) teremos $p = b$ e portanto p é irredutível.

Num reticulado finito não existem necessariamente elementos primos. É o que acontece no reticulado da fig. 7, onde a não é primo porque $a \leq b \vee c = 1$ e entretanto não se verifica nem $a \leq b$, nem $a \leq c$. Os elementos 1, b, c também não são primos.

3.4 — *TEOREMA. Num reticulado distributivo A todo elemento irredutível é primo.* (G. Birkhoft).

Dem. Seja i irredutível e suponhamos que $i \leq a \vee b$, isto é $i = i \wedge (a \vee b)$ como A é distributivo podemos descrever

$$i = (i \wedge a) \vee (i \wedge b)$$

e como i é irredutível teremos «$i = i \wedge a$ ou $i = i \wedge b$» isto é «$i \leq a$ ou $i \leq b$» e portanto i é primo.

Recordemos agora que

3.5 — *TEOREMA. Seja A um reticulado finito no qual todo elemento irredutível é primo, então A é um reticulado distributivo.*

Se trata de um caso particular do Teor 4.11 que demonstraremos no parágrafo seguinte.

Recordemos agora que

3.6 — *TEOREMA. Para que um elemento* $p \neq o$ *de um reticulado finito seja primo é necessário e suficiente que a família* Z *de todos os elementos* z *tais que* $p \not\leq z$, *tenha um último elemento* z_0.

Dem. Seja p primo e $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ a família indicada e ponhamos

$$z_0 = z_1 \vee z_2 \vee \ldots \vee z_n$$

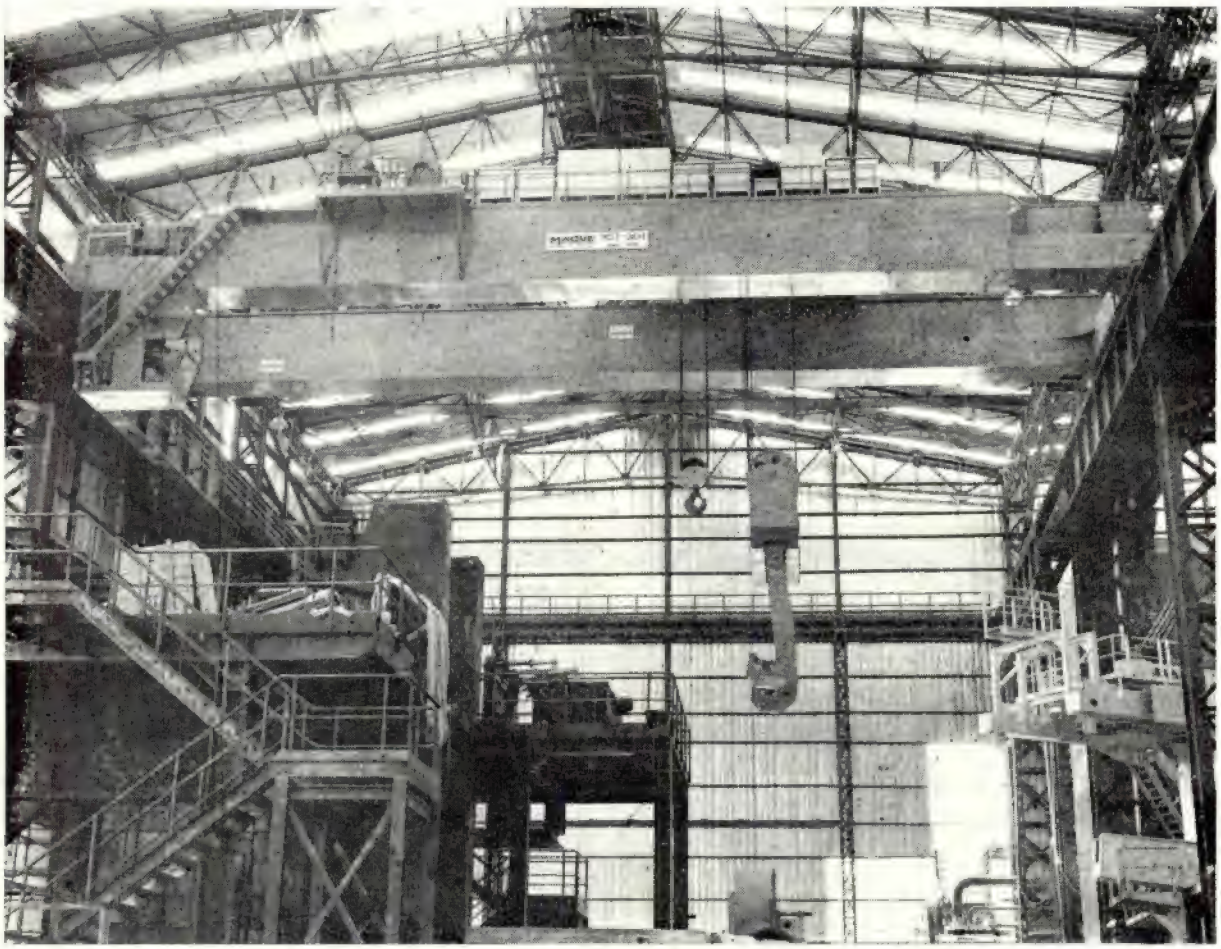
Se fosse $p \leq z_0$ então se vê por recorrência que existe algum índice $i (1 \leq i \leq n)$ tal que $p \leq z_i$ o que é impossível pela definição de Z, logo $p \leq z_0$ e então $z_0 \varepsilon Z$ e z_0 é o último elemento da família Z.

Seja p um elemento tal que 1.º) $p \neq o$; 2.º) A família $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ de todos os elementos tais que $p \not\leq z_i$, tem um último elemento z_0. Provemos que p é primo. Com efeito suponhamos que p não é primo então existem dois elementos x, y tais que (1) $p \leq x \vee y$ (2) $p \not\leq x$ (3) $p \not\leq y$. De (2) e (3) resulta x, $y \varepsilon Z$ logo $x \leq z_0$, $y \leq z_0$ e então (4) $x \vee y \leq z_0$. De (1) e (4) resulta $p \leq z_0$ o que é impossível por hipótese e o teorema está demonstrado.

Os teoremas que acabamos de indicar são de extrema utilidade para averiguar se um reticulado A dado pelo seu diagrama é ou não é distributivo.

Determina-se em primeiro lugar o conjunto I de todos os elementos irredutíveis usando o Teorema 3.1. Para que o reticulado seja distributivo, basta verificar que todos os elementos irredutíveis são primos, o que se faz facilmente usando o Teorema 3.6.

MAGUE



Ponte rolante eléctrica de 110t-30t/26m em serviço nas instalações do Porto da Siderurgia Nacional

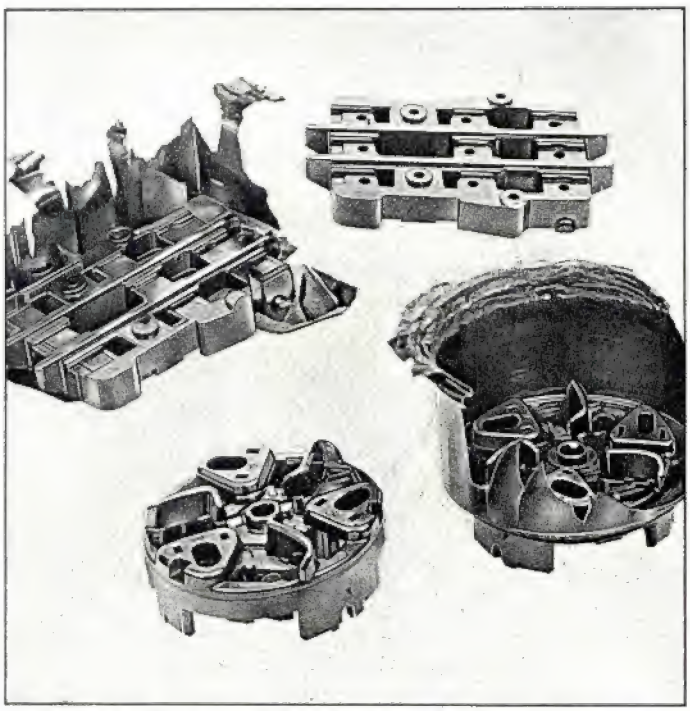
PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

Mais de 15 milhões de horas de trabalho por ano

economiza a indústria de termo-plásticos graças às máquinas +GF+ de decapagem a turbina.



A introdução de máquinas de decapagem a jacto **+GF+** isentas de ar comprimido substitui o trabalho anual de rebarbamento de termo-plásticos. Não há peça alguma moldada que não possa ser tratada por este processo; grandes, pequenas, mínimas, simples, complicadas ou sensíveis a rotura.
Com a turbina de alto rendimento **+GF+** e granulados convenientes desaparecem totalmente todos os tipos de rebarbas, tanto os muitos finos como os de 3/10 de mm de espessura. Daí resultam peças moldadas limpas com superfícies impecáveis.
Mandem fazer experiências práticas na nossa firma e falem com os nossos especialistas.

+GF+

Georges Fischer Sociedade Anónima, Schaffhouse (Suiça)

Representante: Sociedade Comercial Romar, Lda., Rua da Boavista, 83-1° Dto, LISBOA - 2 –
Telefone: 603131 – Telex 12698 romar p

SM 1031/5

Consideremos o reticulado que tem o diagrama da Fig. 9 (verifique que cada par de elementos tem um ínfimo e um supremo usando as respectivas definições). (Basta considerar o caso dos pares incomparáveis por que se $x \leq y$ então $x = x \wedge y$ e $x \vee y = y$).

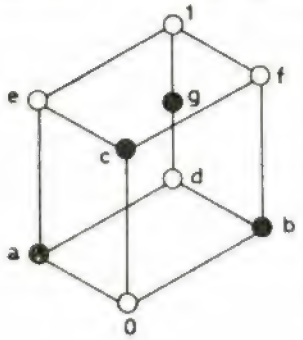


Fig. 9

Os elementos irredutíveis a, b, c, g estão marcados em negro, os elementos a, b, c são primos, mas g não é primo porque a família dos elementos que não seguem g, a saber, o, a, b, c, d, e, f, não tem um último elemento; logo A não é distributivo.

Seja A um reticulado distributivo finito com mais que um elemento e representemos por π o conjunto ordenado(1) de todos os elementos primos de A.

O teorema seguinte tem muita importância.

3.7 — *TEOREMA. Dado um conjunto ordenado finito π_0 existe um reticulado distributivo finito* A *tal que o conjunto π dos elementos primos de* A *é isomorfo a π_0.* Todo reticulado distributivo finito A' com esta propriedade é isomorfo a A (Garrett Birkhoft [1937]).

Demonstraremos a existência de A. Dado um conjunto ordenado π_0 daremos o nome de *secção inferior* de π_0 de a toda a parte S de π_0 tal que se $s \varepsilon S$ e $a \leq s$ então $a \varepsilon S$ e convencionamos que ϕ é um secção inferior de π_0. Uma secção inferior S será chamada uma *secção inferior principal* se existe um elemento $a \varepsilon \pi_0$ tal que S é o conjunto de todos os elementos $x \varepsilon \pi_0$ tais que $x \leq a$ e então escreveremos $S = (a)$.

Vê-se facilmente que a intersecção (reunião) de duas secções inferiores é uma secção inferior. Portanto a família A de todas as secções inferiores de π_0 incluindo a secção vazia ϕ é um reticulado distributivo finito.

Prova-se facilmente que as secções inferiores principais de π_0 isto é as secções inferiores da forma (a) ($a \varepsilon \pi_0$) são elementos *primos* de A.

Com efeito se S_1, et S_2 são duas secções inferiores tais que

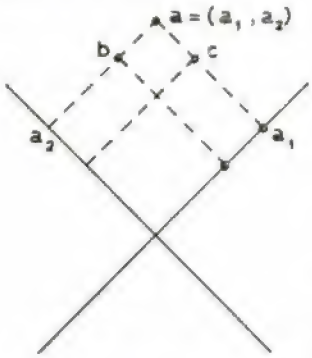
$$(1) \qquad (a) \subseteq S_1 \cup S_2$$

então como $a \varepsilon (a)$ de (1) resulta que ou (2) $a \varepsilon S_1$, ou (3) $a \varepsilon S_2$. Em qualquer dos casos: ou $(a) \subseteq S_1$ ou $(a) \subseteq S_2$ e (a) é um elemento primo de A.

Suponhamos agora que a secção inferior $S \neq \phi$ seja um elemento primo de A observe-se que $S = \cup \{(a);\ a \varepsilon S\}$ e como S, por hipótese, é um elemento primo de A então existe um a tal que (1) $S \subseteq (a)$. Como $a \varepsilon S$ então (2) $(a) \subseteq S$. De (1) e (2) resulta $S = (a)$.

Provámos então que o conjunto dos elementos primos de A é $\pi = \{S(a);\ a \varepsilon \pi_0\}$ e utilizando o Teorema 2.1 podemos afirmar que π_0 é isomorfo a π.

Observemos que existem reticulados distributivos que não contêm nenhum elemento primo (isto é irredutível). Com efeito a recta R com a sua ordem natural é um reticulado distributivo e o mesmo acontece a: $A = R \times R$.



Dado o elemento $a = (a_1, a_2) \varepsilon A$ Consideremos os dois elementos de A

$b = (a_1 - 1, a_2)$
$c = (a_1, a_2 - 1)$

então

$b \vee c = (a_1, a_2) = a$

com $a \neq b$ e $a \neq c$, logo a *não é irredutível* (qualquer que seja $a \varepsilon A$).

É para remediar este inconveniente que se introduz a noção de *filtro* que vamos agora estudar.

No caso de um reticulado *distributivo finito* A o conjunto ordenado π dos seus elementos primos é uma descrição simples e compacta de A. O reticulado distributivo da fig. 3 fica determinado pelo diagrama dos seus elementos primos indicados na figura anexa.

4 — FILTROS

A teoria dos filtros desempenha um papel importante no estudo dos reticulados. Seja A um reticulado. Supomos sempre que A tem mais que um elemento.

4.1 — *DEFINIÇÃO. Uma parte* F *de* A *diz-se um filtro (de* A*) se*

F 1) $F \neq \phi$

F 2) *Se* $a \varepsilon F$ e $a \leq b$ *então* $b \leq F$

F 3) *Se* $a, b \varepsilon F$ *então* $a \wedge b \varepsilon F$

Um filtro F *diz-se próprio se* $F \neq A$.

Para que F seja próprio é necessário (se A tem primeiro elemento o) e suficiente que $o \neq F$.

(1) A ordem sobre π coincide com a ordem dada em A.

4.2 — *DEFINIÇÃO. Dado um elemento* $a \varepsilon A$ *o conjunto* F(a) *de todos os elementos* x *de* A *tais que* $a \leq x$ *é um filtro, chamado filtro principal gerado por a.*

Para que F(a) seja próprio é necessário e suficiente que seja $a \neq o$.

Verifica-se imediatamente que

4.3 — *LEMA. Se* $\{F_i\}$ $(i \varepsilon I)$ *é uma família de filtros então a sua intersecção* $F = \bigcap_{i \varepsilon I} F_i$ *é um filtro se* $F \neq \phi$ (1).

4.4 — *DEFINIÇÃO. Um filtro próprio* F *diz-se irredutível de dados dos filtros* F_1 *e* F_2 *tais que* $F = F_1 \cap F_2$ *então ou* $F = F_1$, *ou* $F = F_2$.

4.5 — *DEFINIÇÃO. Dado um filtro* F *próprio e um elemento* $a \bar{\varepsilon} F$, *dá-se o nome de filtro gerado por* F *e* a *à intercepção* G *de todos os filtros que contêm* F *e* a.

4.6 — *TEOREMA. Dado um filtro próprio* F *e um elemento* $a \bar{\varepsilon} F$ *então o filtro gerado por* F *e* a *é o conjunto* G *de todos os elementos* g *para cada um dos quais existe um elemento* $f \varepsilon F$ *sal que* $f \wedge a \leq g$.

Dem. Basta provar F1), F2) e F3).

F1) É claro que $G \neq \phi$, porque $f \wedge a \leq f$ logo $a \varepsilon G$.

F2) *Se* $g \varepsilon G$ e $g \leq g'$ *então* $g' \varepsilon G$.

De $g \varepsilon G$ resulta que existe um elemento $f \varepsilon F$ tal que

$$f \wedge a \leq g$$

como $g \leq g'$ então

$$f \wedge a \leq g'$$

e portanto $g' \varepsilon G$.

F3) *Se* $g, g' \varepsilon G$ *então* $g \wedge g' \varepsilon G$.

Das hipóteses resulta que existem elementos $f, f' \varepsilon F$ tais que

$$f \wedge a \leq g \qquad f' \wedge a \leq g'$$

logo

$$(f \wedge a) \wedge (f' \wedge a) \leq g \wedge g'$$

como $f'' = f \wedge f' \varepsilon F$ então

$$f'' \wedge a \leq g \wedge g'$$

e portanto $g \wedge g' \varepsilon G$ o que termina a demonstração de que G é um filtro. Além disso G é o menor filtro que contém F e a, como se vê sem dificuldade.

OBSERVAÇÃO: No caso em que A contém um zero; para que o filtro G seja próprio é necessário e suficiente que $o \bar{\varepsilon} G$ isto é que $f \wedge a \neq o$ para todo $f \varepsilon F$; diz-se neste caso que *a* é compatível com F.

4.5 — *TEOREMA. Num reticulado A, todo filtro próprio é a intersecção de filtros irredutíveis* (Birkhoft).

Dem. Seja F um filtro próprio e $c \bar{\varepsilon} F$. Consideremos a família $\mathbf{F}$ de todos os filtros (próprios) que contêm F sem conter c.

Seja $\mathbf{C} = \{F_i\}$ uma cadeira de filtros de $\mathbf{F}$ isto é uma família de filtros de $\mathbf{F}$ tais que dados dois filtros de $\mathbf{C}$ um deles está contido no outro então o conjunto

$$X = \bigcup F_i$$

é um filtro próprio que contém F sem conter c.

Acabamos de provar que todas as cadeias de $\mathbf{F}$ têm uma cota superior logo pelo teorema de Zorn a família $\mathbf{F}$ tem pelo menos um elemento máximo C, isto é existe um filtro $C \varepsilon \mathbf{F}$ tal que 1.º) $F \subseteq C$, 2.º) $c \bar{\varepsilon} C$ e não existe nenhum filtro $C' \varepsilon \mathbf{F}$ com estas duas propriedades e tal que $C \subset C'$.

Provemos que C é irredutível — Com efeito supunhamos que $C = F_1 \cap F_2$, então $C \subseteq F_1$, $C \subseteq F_2$.

Se $C \neq F_1$ e $C \neq F_2$ então $C \subset F_1$, $C \subset F_2$. Daqui resulta por ser C um filtro máximo na família $\mathbf{F}$ que $c \varepsilon F_1$ e $c \varepsilon F_2$ e portanto $c \varepsilon F_1 \cap F_2 = C$ o que é impossível pela definição de C. Podemos então afirmar que ou $C = F_1$ ou $C = F_2$ e portanto C é irredutível.

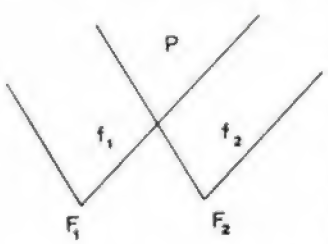
Acabamos assim de provar que dado o filtro próprio F e um elemento $c \bar{\varepsilon} F$ existe um filtro irredutível C que contém F sem conter c. Isto mostra que F é intersecção de filtros irredutíveis.

4.6 — *DEFINIÇÃO. Um filtro próprio* P *diz-se primo se a condição* $a \vee b \varepsilon P$ *implica que* $a \varepsilon P$ *ou* $b \varepsilon P$.

4.7 — *TEOREMA. Em todo reticulado todo filtro primo é irredutível* (G. Birkhoft e O. Frink [1948]).

Dem. Seja P um filtro primo e suponhamos que existem dois filtros F_1, F_2 tais que $P = F_1 \cap F_2$.

Se $P \neq F_1$ existe um elemento f, tal que (1) $f_1 \varepsilon F_1$ (2) $f_1 \bar{\varepsilon} P$



Se $P \neq F_2$ existe um elemento f_2 tal que (3) $f_2 \varepsilon F_2$, (4.º) $f_2 \bar{\varepsilon} P$ então como (5) $f_1 \leq f_1 \vee f_2$ (6) $f_2 \leq f_1 \vee f_2$ De (1) e (5) resulta (7) $f_1 \vee f_2 \varepsilon F_1$ De (2) e (6) resulta (8) $f_1 \vee f_2 \varepsilon F_2$ então (9) $f_1 \vee f_2 \varepsilon F_1 \cap F_2 = P$ e como P é primo de (9) resulta $f_1 \varepsilon P$ (o que contradiz (2)) ou $f_2 \varepsilon P$ (o que

(1) Se A tem último elemento então F não pode ser vazio.

contradiz (4)). Podemos portanto afirmar que $P = F_1$ ou $P = F_2$ e P é irredutível.

4.8 — *TEOREMA. Num reticulado distributivo todo filtro irredutível e primo* (G. Birkhoft e O. Frink [1948]).

Dem. Seja I um filtro irredutível e suponhamos que I não é primo, então existem dois elementos a, b tais que 1.º) $a \vee b \varepsilon I$, 2.º) $a \bar{\varepsilon} I$, 3.º) $b \bar{\varepsilon} I$.

Seja F_a o filtro gerado por I e a; para que $x \varepsilon F_a$ é necessário e suficiente que exista um elemento $i \varepsilon I$ tal que (1) $i \wedge a \leq x$.

Seja F_b o filtro gerado por I e b; para que $x \varepsilon F_b$ é necessário e suficiente que exista um elemento $j \varepsilon I$ tal que (2) $j \wedge b \leq x$.

É claro que (3) $a \varepsilon F_a$ e (4) $b \varepsilon F_b$.

Por outro como $I \subseteq F_a$ e $I \subseteq F_b$ então (5) $I \subseteq F_a \cap F_b$. Provemos agora que (6) $F_a \cap F_b \subseteq I$. Para isso seja $x \varepsilon F_a \cap F_b$ então existem $i, j \varepsilon I$ tais que

$$i \wedge a \leq x \qquad j \wedge b \leq x$$

logo

$$i \wedge j \wedge a \leq x \qquad i \wedge j \wedge b \leq x$$

É claro que $k = i \wedge j \varepsilon I$. Então

$$k \wedge a \leq x \qquad k \wedge b \leq x$$

logo (7) $k \wedge a \vee k \wedge b = k \wedge (a \vee b) \leq x$ e como $k \varepsilon I$ e $(a \vee b) \varepsilon I$, teremos (8) $k \wedge (a \vee b) \varepsilon I$. De (7) e (8) resulta $x \varepsilon I$ e (6) está demonstrada. De (5) et (6) resulta.

$$I = F_a \cap F_b$$

com $F_a \neq I$ e $F_b \neq I$, o que é impossível porque I é irredutível. Esta contradição mostra que I é primo como queriamos demonstrar.

4.10 — *TEOREMA. Num retiuulado distributivo todo filtro é intersecção de filtros primos* (Stone (M.) [1937]).

Dem. Consequência de 4.5 e 4.8.

4.11 — *TEOREMA. Se todo filtro irredutível de um reticulado é primo então o reticulado é distributivo.*

Dem. De $b \leq b \vee c$ e $c \leq b \vee c$ resulta $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$ e $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$ e portanto

(I) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

Suponhamos que

(II) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) < a \wedge (b \vee c)$

Considero o filtro principal $F(a \wedge (b \vee b\,c))$ por (II) e Teor 4.5 existe um *filtro irredutível* tal que

(1) $F(a \wedge (b \vee c)) \subseteq I$

(2) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \bar{\varepsilon} I$

De (1) resulta (3) $a \wedge (b \vee c) \varepsilon I$ logo (4) $a \varepsilon I$ e (5) $b \vee c \varepsilon I$, como I é irredutível então I é primo, e de (5) resulta que ou (5') $b \varepsilon I$ ou (5") $c \varepsilon I$.

Suponhamos que $b \varepsilon I$ então de (4) (5') resulta $a \wedge b \varepsilon I$ e como

$$a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

podemos afirmar que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \varepsilon I$ o que contradiz (2).

De modo análogo a hipótese (5") conduz a uma contradição e portanto (II) não pode ser verificada e teremos

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$$

e o reticulado é distributivo (*).

Recordemos ainda que

4.12 — *TEOREMA. Para que num reticulado A todo o filtro seja intersecção de filtros primos é necessário e suficiente que o reticulado seja distributivo.*

Este resultado foi anunciado em A. Monteiro [1947] e demonstrado em A. Monteiro [1948].

Recordemos o seguinte *Teorema Fundamental* na teoria dos reticulados distributivos.

4.12 — *Todo reticulado distributivo A é isomorfo a um anel de conjuntos* (Garrett Birkhoft [1933]).

Dem. Se A tem um só elemento então A é isomorfo ao anel de conjuntos *A* formado pelo conjunto vazio ϕ. Se A tem mais do que um elemento, seja E a família dos filtros primos de A. Para $a \varepsilon A$ ponhamos

$$s(a) = \{P \varepsilon E / a \varepsilon P\}$$

É claro que s(a) é uma parte de E.

Verifica-se imediatamente que

(1) $s(a \wedge b) = s(a) \cap s(b)$

(2) $s(a \vee b) = s(a) \cup s(b)$

Seja $\mathbf{A} = \{s(a);\ a \varepsilon A\}$. De (1) e (2) resulta que $\mathbf{A}$ é um anel de conjuntos e que s é um homomorfismo de A sobre $\mathbf{A}$. Para ver que s é um isomorfismo basta provar que s é biunívoca.

Sejam $a, b \varepsilon A$ tais que $a \neq b$ isto é ou (1) $a \nleq b$ ou (2) $b \nleq a$.

No caso (1) F(a) é um filtro que não contém b, logo pelo teorema 4.10 existe um filtro primo P que contém F(a) sem conter b. Como $a \varepsilon P$ e $b \bar{\varepsilon} P$ então

(*) K. ISEKI [1952] demonstrou este teorema supondo que A tem primeiro elemento.

$s(a) \neq s(b)$. No caso (2) a demonstração é análoga e podemos afirmar que s é biunívoca (1).

4.14 — *TEOREMA. Seja A um reticulado distributivo. Para que* $a \varepsilon A$ *seja irredutível* (primo) *é necessário e suficiente* que o filtro principal F(a) seja respectivamente irredutível (primo) (G. Birkhoft — [1940]).

Tendo em conta este resultado vê-se que os teoremas 3.2, 3.5 são casos particulares dos teoremas 4.13 e 4.11.

A noção de ideal é *dual* da noção de filtro e a sua definição é a seguinte

3.8 — *DEFINIÇÃO. Uma parte I de um reticulado A diz-se um ideal de A se* I_1) $I \neq \phi$; I_2) *Si* $a \varepsilon I$ *e* $b \leq a$ *então* $b \varepsilon I$; I_3) *Si* $a, b \varepsilon I$ *então* $a \vee b \varepsilon I$. A todas as definições que indicamos para os filtros (primos, irredutíveis), correspondem definições duais para os ideais e a cada propriedade válida para os filtros corresponde uma propriedade dual válida para os ideais, que nos abstemos de enunciar.

Recordemos solamente que

3.9 — *TEOREMA. Para que um filtro P de um* reticulado A seja um filtro primo é necessário e suficiente que o seu complemento $C\,P = A - P = I$ seja um ideal, cuja demonstração é imediata.

5 — ALGEBRAS DE MORGAN

Vamos agora introduzir noções necessárias para o estudo dos conjuntos graduados sob o ponto de vista da Algebra.

5.1 — *DEFINIÇÃO. Um sistema* $(A, \wedge, \vee, \sim)$ *formado por um conjunto não vazio A, duas operações binárias* $\wedge$, $\vee$ *e uma operação unária* $\sim$ *definidos sobre* A, *diz-se um reticulado de Morgan se são verificadas as seguintes condições:*

1.º) $(A, \wedge, \vee)$ *é um reticulado distributivo;*

2.º) *Operador* $\sim$ *(chamado de negação) verifica as duas igualdades*

M_1) $\sim \sim x = x$

M_2) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

Esta noção foi considerada pela primeira vez por GR. C. MOISIL (1935) (pág. 91). O estudo desta noção foi iniciado por J. Kalman [1958] (2), que obteve resultados muito importantes.

Notemos que de M_1) e M_2) resulta
$\sim (\sim x \wedge \sim y) = \sim \sim x \vee \sim \sim y = x \vee y$
e portanto

M_3) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

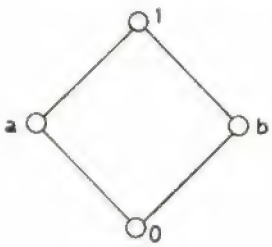
Em particular $x \vee y = \sim (\sim x \wedge \sim y)$.

A terminologia *Reticulado de Morgan* foi introduzida em A. Monteiro [1960] e é hoje geralmente adoptada.

5.2 — *DEFINIÇÃO. Um reticulado de Morgan* A *diz-se uma algebra de Morgan se* A *contém um último elemento 1* (isto é $x \vee 1 = 1$).

Ponhamos $\sim 1 = 0$. De $x \vee 1 = 1$
resulta $\sim x \wedge \sim 1 = \sim 1$, isto é
$\sim x \wedge 0 = 0$ ou substituindo x por $\sim x$: $x \wedge 0 = 0$
e portanto o é primeiro elemento de A.

Um exemplo importante de álgebra de Morgan é o reticulado distributivo cujo diagrama está indicado na Fig. 5.1. As tábuas das operações $\vee$, $\wedge$ e $\sim$ são as seguintes:



Algebra M 4
Fig. 5.1

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	1
b	0	0	b	1
1	0	a	b	1

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

x	$\sim$ x
0	1
a	a
b	b
1	0

O leitor pode verificar que se trata de uma álgebra de Morgan.

As álgebras de Morgan foram estudadas por A. Bialjnicki Birula-H. Rasiowa [1957] e por A. Bialjnicki-Birula [1957], sob o nome de álgebras quase booleanas.

Os primeiros autores indicavam a seguinte *construção para obter álgebras de Morgan.* Seja dado um conjunto não vacio E e uma involução de E sobre E, isto é uma aplicação φ de E sobre E tal que tal que $\varphi\ \varphi\ (x) = x$ para todo $x \varepsilon E$.

Para toda parte $X \subseteq E$ ponhamos

$$(*) \quad \sim X = C\ \varphi\ (X)$$

então a família $A = 2^E$ de todas as partes de E agebrizada pelas operações de intersecção ($\cap$), reunião ($\cup$) e ($\sim$) é uma álgebra de Morgan o que se verifica sem dificuldades.

Toda sub-álgebra da álgebra de Morgan A que acabamos de indicar diz-se uma álgebra de Morgan de conjuntos

Consideremos um conjunto com dois pontos $E = \{a, b\}$ e seja φ definido por $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$.

(1) Ver também Iseki [1950].
(2) Sob o nome de «distributivo i — lattice».

Então $2^E = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. O diagrama destes conjuntos, ordenados pela relação de inclusão, está indicado na figura. A negação está definida de acordo com (*) por $\sim \phi = E$, $\sim E = \phi$ $\sim \{a\} = \{a\}$, $\sim \{b\} = \{b\}$ A álgebra assim obtida é uma álgebra de Morgan (que é de resto isomorfa à álgebra M4.

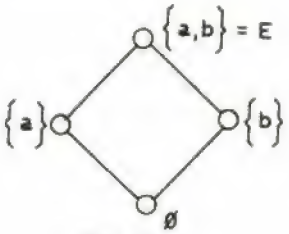


Fig. 5.2

Indiquemos o importante

5.3 — *TEOREMA. Toda álgebra de Morgan* A *é isomorfa a uma álgebra de Morgan de conjuntos* (Bialjnicki-Birula e H. Rasiowa [1957].

Indiquemos a técnica usada por estes autores para demonstrar este teorema. Se A tem um *só* elemento então A é isomorfa ao conjunto vazio ϕ. Basta definir $\sim$ pela igualdade $\sim \phi = \phi$, para ver que o teorema é verdadeiro neste caso. Se A tem mais do que um elemento seja E a família de todos os filtros primos P de A. Consideremos a seguinte *transformação de Birula-Rasiowa*

$$\varphi(P) = A - \sim P = C \sim P.$$

donde $\sim P$ é o conjunto de todos os elementos da forma $\sim p$, para $p \varepsilon P$. Prova-se que φ (P) é um filtro primo isto é φ (P) ε E e ademais $\varphi\varphi(P) = P$. Está assim definida uma involução sobre E. Para $X \subseteq E$, define-se a negação de Morgan. $\sim X = C_\varphi$ (P) e então $A = 2^E$ algebrizada pelas operações $\cap$, $\cup$, $\sim$ é uma álgebra de Morgan, e os autores provam que A é isomorfa a uma sub-álgebra de *A*. Ver também H. Rasiowa [1974]. Recordemos também que

5.4 — *TEOREMA. Toda álgebra de Morgan* A *com mais de um elemento é isomorfa a uma sub-álgebra de um produto cartesiano de álgebras M4* (Bialjnicki-Birula [1957]).

Ver também H. Rasiowa [1974] pág. 471. Um resultado análogo foi demonstrado por J. Kalman [1958] para os reticulados de Morgan.

Sejam $x_1, x_2 \ldots, x_n, \ldots$ variáveis individuais que podem tomar valores sobre uma álgebra de Morgan. Daremos o nome de forma polinominal das variáveis $x_1, x_2, \ldots x_n$, a toda a expressão que pode ser obtida usando as variáveis dadas $x_1, \ldots x_n$, os símbolos $\wedge$, $\vee$, e (parêntesis esquerdo e direito) (e); de acordo com as seguintes regras:

1.º) As variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são formas polinomiais.

2.º) Se p e q são formas polinais estão $(p \wedge q)$, $(o \vee g)$ e $\sim p$ são formas polinominais.

Representaremos as formas polinomiais de n variáveis pelos símbolos $p(x_1, \ldots, x_n)$, $q(x_1, \ldots x_n)$ etc.

São exemplos de formas polinomiais de n variáveis: $(x_1 \wedge x_2)$; $(\sim x_1 \vee (\sim x_2 \wedge x_3))$, etc.

Dada uma álgebra de Morgan A e uma forma polinomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ se substituirmos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de A obteremos um elemento de A que representaremos por

$$p_A (a_1, \ldots, a_n) \varepsilon A$$

Nestas condições cada forma polinomial p dá origem a uma *aplicação* p_A de $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ em A, que chamaremos uma *função polinomial* p_A $(x_1, \ldots x_n)$. Duas funções polinomiales $p_A (x_1, \ldots x_n)$ $q_A (x_1, \ldots, x_n)$ dizem-se *idênticas em A* se

$$p_A (a_1, \ldots, a_n) = q_A (a_1, \ldots, a_n)$$

para todas as escolhas de $(a_1, \ldots, a_n)$ em A. Escreveremos então mais simplesmente $p_A = q_A$.

Duas formas polinomiales dizem-se idênticas se para toda álgebra de Morgan A for $p_A = q_A$ *e então escreveremos simplesmente* p = q.

5.5 — *DEFINIÇÃO. Uma álgebra de Morgan* K *diz-se característica se as duas condições seguintes forem equivalentes.*

1.º) f e g *são idênticas, isto é* f = g.

2.º) $f_k = g_k$.

O autor mencionado anteriormente demonstrou o seguinte:

5.6 — *TEOREMA. K4 é uma álgebra característica para as álgebras de Morgan.*

Vejamos que as fórmulas polinominales $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge \sim x_1$ e $g(x_1 x_2) = x_1 \wedge \sim x_1 \wedge (x_2 \vee \sim x_2)$ não são idênticas. Com efeito em M4 tem-se

f_{k4} (a, b) = $a \wedge \sim a = a$

g_{k4} (a, b) = $(a \wedge \sim a) \wedge (b \vee \sim b) = a \wedge b = 0$

e portanto $f_{k4} (x_1 x_2) \neq g_{k4} (x_1 x_2)$ logo f e g não são idênticas isto é: $f \neq g$.

Isto significa que a igualdade

$$x_1 \wedge \sim x_1 = x_1 \wedge \sim x_1 \wedge (x_2 \vee \sim x_2)$$

não pode ser demonstrada a partir dos axiomas de uma álgebra de Morgan. Existe portanto um procedimento mecânico para averiguar se duas formas polinomiais são ou não idênticas.

Podemos dizer que uma forma polinomial $p(x_1, \ldots, x_n)$ é uma tese se $p_{k4}(x_1 x_2, x \ldots x_n) = 1$ para todo $x_1 x_2, \ldots, x_n \varepsilon K_4$. É fácil de ver que não há nenhuma forma polinomial que seja uma tese. Com efeito se dermos às variáveis $x_1, \ldots, x_n$ o valor $a \varepsilon K_4$ então

$$p_{k4}(a, a, \ldots, a) = a$$

visto que *a* é invariante para as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$ já que $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$, $\sim a = a$.

É interessante notar que num reticulado de Morgan podemos defenir o operador de Sheffer

$$x/y = \sim x \wedge \sim y$$

Monteiro (L.) e Pico (D.) [1963] mostraram que as operações $\vee$, $\wedge$ e $\sim$ podem ser obtidas a partir do operador de Shneffer por meio das fórmulas

(I) $\sim a = a/a$ (II) $a \wedge b = (a/a) / (b/b)$

(III) $a \vee b = (a/b) / (a/b)$

e caracterizaram os reticulados de Morgan por meio de duas igualdades onde figura somente o operador de Sheffer.

Por outro lado Maronna (R.) [1964] caracterizou os reticulados de Morgan por meio de duas igualdades nas quais figuram somente os operadores $\vee$ e $\sim$.

Gastaminzza (M. L.) e Gastaminza (S.) [1968] caracterizaram os reticulados de Morgan, tomando como operadores primitivos a implicação $a \rightarrow b = \sim a \vee b$ e a negação $\sim$.

Dado um reticulado distributivo finito A põe-se naturalmente o problema de saber se é possivel definir sobre A um operador de negação $\sim$ que dê a A uma estrutura de álgebra de Morgan.

Como A é determinado, a menos de um isomorfismo, pelo conjunto ordenado π dos elementos primos de A é natural tratar de resolver este problema estudando π.

A este respeito demonstrámos o seguinte resultado.

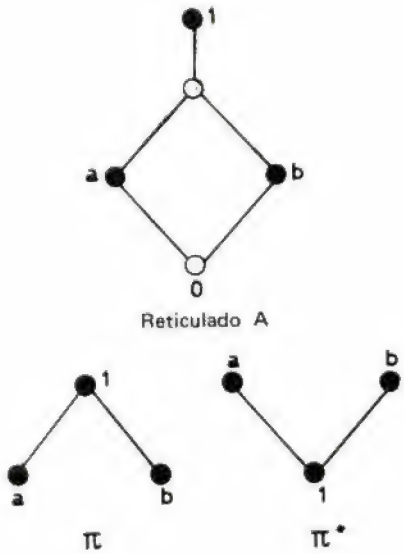
5.7 — *TEOREMA. Se A é um reticulado distributivo finito e $(\pi, \leq)$ o conjunto ordenado de todos os elementos primos de A, para que sobre A se possa definir uma estrutura de álgebra de Morgan é necessário e suficiente que exista uma involucão ψ de π sobre π, isto é um anti-isomorofismo de π sobre π de periodo 2.* Diremos que o par (π, ψ) é o *sistema determinante* da álgebra de Morgan buscada. A partir de ψ determina-se a negação de Morgan $\sim$ por meio da fórmula válida para todo $x \varepsilon A$

$$\sim x = \vee \{p;\ \psi(p) \not\leq x\}$$

A. Monteiro [1960] [1963].

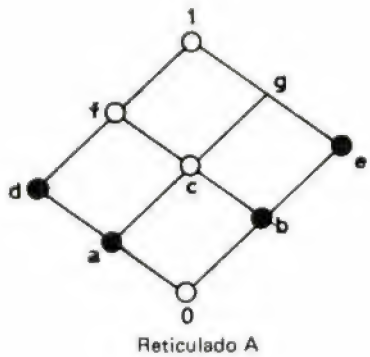
A demonstração deste teorema não foi ainda publicada, mas foi exposta num curso dado na Universidade Nacional do Sur (Bahia Blanca — Argentina) no 1.º semestre de 1962 (*).

Consideremos o reticulado distributivo A que tem o diagrama indicado na figura sseguinte, onde estão marcados em negro os elementos primos de A; {a, b, 1}. Representamos àparte o diagrama de π e o seu dual π^*.



Como π e π^* não são isomorfos então não existe nenhuma involução de π sobre π. Logo sobre A não pode definir-se uma estrutura de Álgebra de Morgan.

Consideremos agora o reticulado distributivo com 9 elementos indicado no diagrama seguinte onde



x	$\sim x$	$\sim\sim x$
0	1	1
a	g	f
b	f	g
c	c	c
d	e	d
e	d	e
f	b	a
g	a	b
1	0	0

p	$\psi(b)$	$\varphi(b)$
a	d	e
d	a	b
b	e	d
e	b	a

estão marcados em negro os elementos primos de A. O diagrama de π está indicado na figura seguinte.

(*) A licenciada Isabel Loureiro, da Faculdade de Ciências de Lisboa, posui fotocópia das notas de curso, com a demonstração respectiva.

Neste caso existem duas involuções de π sobre π, ψ e φ dadas nas tábuas anexas. Isto significa que é possível definir sobre A duas negações de Morgan $\sim$ e $\sim$ dadas pelas tábuas seguintes de acordo com o teorema anterior.

Diagrama de π

Involução ψ — Para obter $\sim a$ tenho que determinar o conjunto de todos os elementos primos p tais que $\psi(p) \not\leq a$; os primos em questão são a, b, e, logo

$$\sim a = a \vee b \vee e = g$$

De modo análogo se calculam as negações dos outros elementos.

Involução φ — Para obter $\sim a$ determino o conjunto de todos os elementos primos p tais que $\varphi(p) \not\leq a$, que é: {a, b, d} logo $\sim a = a \vee b \vee d = f$. De modo análogo se procede com os outros elementos.

Sobre o reticulado dado A existem então duas e só duas estruturas de álgebra de Morgan. Esta construção é importante para encontrar exemplos de Álgebras de Morgan finitas.

Está pendente a resolução do seguinte problema:

Dado um conjunto ordenado finito π, encontrar um algoritmo que permita: 1.º) averiguar se existe alguma involução de π e no caso afirmativo. 2.º) Determinar todas as involuções de π.

António Diego encontrou um conjunto ordenado com 24 elementos, que admite um anti-isomorfismo de π sobre π, mas para o qual não existe nenhuma involução de π (resultado não publicado).

6 — AS ÁLGEBRAS DE KLEENE

As noções algébricas estudadas no parágrafo anterior são insuficientes para o estudo dos conjuntos graduados de Zadeh. Durante bastante tempo este e outros autores só puseram em evidência as regras de cálculo que valem numa álgebra de Morgan.

Recordemos que Kleene (St.) considerou em [1938] (*) um cálculo proposicional, com três conectivos $\wedge$, $\vee$, $\sim$, que tem por matriz característica um conjunto com 3 valores de verdade: o (falso), ½ (indecidível), 1 (verdadeiro), definidos pelas tábuas seguintes:

$\wedge$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

$\vee$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

x	$\sim$x
0	1
½	½
1	0

(*) Ver também [1952].

Observamos que o correctivo $\vee$ pode ser definido por meio de $\wedge$ e $\sim$ já que

$$a \vee b = \sim(\sim a \wedge \sim b)$$

Como se verifica de imediato usando as tábuas anteriores. Basta portanto conhecer $\wedge$ e $\sim$.

Kleene indicava também tábuas para outros conectivos $\rightarrow$ (implicação) e $\longleftrightarrow$ (equivalência), mas não é necessário indicar essas tábuas visto que elas podem ser obtidas por meio das seguintes definições

$$a \rightarrow b = \sim a \vee b$$

$$a \longleftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$$

A este cálculo daremos o nome de *cálculo proposicional trivalente de Kleene* (em notação K 3).

A matriz que acabamos de indicar será representada pela notação M_3. Consideremos o conjunto $M_3 = \{0, ½, 1\}$ ordenado pela relação $\leq$, então como se trata de um conjunto totalmente ordenado, podemos afirmar que M_3 é um reticulado distributivo onde

$$a \wedge b = \min(a, b)$$
$$a \vee b = \max(a, b)$$

Assim se obtiveram as tábuas anteriormente indicadas para $\wedge$ e $\vee$.

Também se verifica que valem as regras de cálculo $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$ e $\sim\sim x = x$ e portanto o Sistema $(M_3, \wedge, \vee, \sim)$ é um reticulado de Morgan, mas trata-se de um reticulado de Morgan *muito particular*, já que se verifica a igualdade de J. Kalman

$$(K) \qquad x \wedge \sim x = x \wedge \sim x \wedge (y \vee \sim y)$$

que não é válida em todas as álgebras de Morgan; e que pode escrever-se mais simplesmente

$$(K) \qquad x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$$

para todo x e todo y. Esta situação conduz-nos à seguinte definição que se deve a J. Kalman [1958].

6.1 — *DEFINIÇÃO. A um reticulado de Morgan* $(A, \wedge, \vee, \sim)$ *tal que*

$$(K) \qquad x \wedge \sim x = x \wedge \sim x \wedge (y \vee \sim y)$$

daremos o nome de reticulado de Kleene. Se num reticulado de Kleene é dado um elemento $1 \in A$ *tal que* $x \vee 1 = 1$ *diremos que o sistema* $(A, \wedge, \vee, \sim, 1)$ *é uma álgebra de Kleene e que 1 é o elemento designado.*

Pela fórmula $x \vee 1 = 1$ vê-se que 1 é o último elemento do reticulado distributivo A. Pode acontecer

que um reticulado de Kleene contenha um último elemento 1. Dar um elemento 1 de A é no fundo dar um operador de zero variáveis, ao qual se dá muitas vezes o nome de *elemento designado*. Nesta situação é preciso distinguir cuidadosamente entre os dois sistemas $(A, \vee, A, \sim)$ e $(A, \wedge, \vee, \sim, 1)$. Isto tem muita importância na definição de sub-álgebra. Uma sub-álgebra de $(M_3, \wedge, \vee, \sim)$ e toda parte S não vazia de M_3 fechada para as operações $\wedge, \vee, \sim$. Assim $S = \{\frac{1}{2}\}$ é uma sub-álgebra de $(M_3, \wedge, \vee, \sim)$ e não é uma sub-álgebra do sistema $(M_3, \wedge, \vee, \sim, 1)$, visto que toda sub-álgebra deste sistema deve conter o elemento 1 (e portanto o elemento $0 = \sim 1$, portanto $S = \{\frac{1}{2}\}$ não é uma sub-álgebra deste segundo sistema.

Estas noções foram introduzidas por J. Kalman, na sua tese de doutoramento na Universidade de Harvard em 1955, mas os importantes resultados obtidos por este matemático de Nova Zelândia, só foram publicados em [1958], onde deu à noção de reticulado de Kleene o nome de «*normal i — lattice*». Devemos então distinguir o reticulado de Kleene M_3 da álgebra de Kleene M_3 (na qual se dá o elemento designado 1). Muitas vezes falaremos da Álgebra M_3, sem fazer distinções que estarão implícitas no contexto.

Comecemos por indicar alguns exemplos:

EXEMPLO 1

Seja $A = (0,1)$ o conjunto de todos os números reais x tais que $0 < x < 1$ onde por definição

(1) $x \wedge y = \min(x, y)$
(2) $x \vee y = \max(x, y)$
(3) $\sim x = 1 - x$

então o sistema $< A, \wedge, \vee, \sim >$ é um reticulado de Kleene. Verifica-se de imediato que se trata de um reticulado de Morgan e como

$$x \wedge \sim x \leq \tfrac{1}{2} \leq y \vee \sim y$$

A igualdade (K) é verificada e estamos em presença de um reticulado de Kleene. $(A, \wedge, \vee, \sim)$, que não tem último elemento.

EXEMPLO 2

Seja R o conjunto dos números reais. Definamos as operações $\wedge$ e $\vee$ pelas fórmulas (1) e (2), e ponhamos $\sim x = -x$

Então o sistema $(R, \vee, \wedge, \sim)$ é um reticulado de Kleene (já que $x \wedge \sim x \leq 0 \leq y \vee \sim y$) que não tem último elemento.

EXEMPLO 3

Seja $A = [0,1]$, onde as operações $\wedge, \vee, \sim$ estão definidas por (1), (2), (3) então o sistema $(A, \wedge, \vee, \sim, 1)$ é uma álgebra de Kleene.

EXEMPLO 4

Seja $A = \{0,1, \ldots, n\}$. Definamos as operações $\wedge$ e $\vee$ pelas fórmulas (1) e (2) e ponhamos por definição para $x \in A$: $\sim x = n - x$; então o sistema $(A, \wedge, \vee, \sim)$ é um reticulado de Kleene e o sistema $(A, \wedge, \vee, \sim, n)$ é uma álgebra de Kleene.

EXEMPLO 5

Seja p um número primo e $A = \{p^0 = 1, p^1, p^2, \ldots, p^n\}$.

Ponham por definição para

$$x = p^{\alpha} \quad y = p^{\beta} \text{ (onde } o \leq \alpha \leq n, \ o \leq \beta \leq n)$$

$$x \wedge y = p^{\alpha \wedge \beta}, \text{ onde } \alpha \wedge \beta = \min(\alpha\ \beta)$$

$$x \vee y = p^{\alpha \vee \beta} \quad \text{onde } \alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$$

e $\sim x = p^{n-\alpha}$ então o sistema $(A, \wedge, \vee, \sim, p^n)$ é uma álgebra de Kleene.

Observe-se que $x \wedge y$ é o máximo comum divisor de x e y e que $x \vee y$ é o menor múltiplo comum de x e y, além disso $\sim x = \frac{p^n}{p^{\alpha}} = \frac{p^n}{x}$, Então o sistema $< A, \wedge, \vee, \sim, p^n >$ é uma álgebra de Kleene que é de resto isomorfa ao exemplo 4.

Observe-se que neste reticulado a relação de ordem $\leq$ $(x = x \wedge y)$ coincide com a relação de divisibilidade (x divide y) e que A tem por último elemento p^n e por primeiro elemento $p^0 = 1$. Indiquemos o diagrama de A sobre a figura 6.1. Na figura

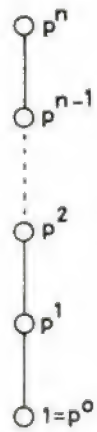


Fig. 6.1

Fig. 6.2

6.2 está indicado o diagrama do exemplo 4. Vê-se imediatamente que estas duas álgebras de Kleene são isomorfas. Note-se que na figura 6.1 $\sim p^0 = \sim 1 = p^n$, $\sim p = p^{n-1}$, $\sim p^2 = p^{n-2}$, etc. e que na figura 6.2

$$\sim 0 = n, \ \sim 1 = n - 1, \ \sim 2 = n - 2, \text{ etc.}$$

EXEMPLO 6

Seja n um número natural cuja decomposição em factores primos é

$$n = p_1^{n1}\ p_2^{n2} \dots\ p_k^{nk}$$

e seja A o conjunto de todos os divisores x de n, isto é $x = p_1^{x1}\ p_2^{x2} \dots p_k^{xk}$ com $o \leq x_i \leq n_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

Se x, y ε A escrevemos $x \wedge y$ para indicar o máximo comum divisor de x e y e $x \vee y$ para indicar o mínimo comum múltiplo de x e y. Se x é da forma indicada e $y = p_1^{y1} p_2^{y2} \dots p_k^{yk}$ e se

$$x_i \wedge y_i = \min (x_i, y_i)$$

$$x_i \vee y_i = \max (x_i, y_i)$$

então

$$x \wedge y = p_1^{x_1 \wedge y_1}\ p_2^{x_2 \wedge y_2} \dots\ p_k^{x_k \wedge y_k}$$

$$x \vee y = p_1^{x_1 \vee y_1}\ p_2^{x_2 \vee y_2} \dots\ p_k^{x_k \vee y_k}$$

são respectivamente o m. c. d. de x e y e o m. m. c. de x e y.

Então o sistema (A, $\wedge$, $\vee$) é um reticulado distributivo que tem por último elemento n e por primeiro elemento $1 = p^o_1\ p^o_2 \dots p^o_k$. Ponhamos $1 = n$. Definamos a operação de negação pela fórmula $\sim x = \frac{n}{x}$ (onde x ε A) então o sistema (A, $\wedge$, $\vee$, $\sim$, 1) é uma *álgebra de Kleene* e (~ 1) é o inteiro 1.

Veja I. M. Yaglóm [1977] onde se encontra este exemplo pág. 50, (exercício 6), pág. 30 (exemplo 4).

Este autor põe em evidência neste exemplo as reglas de cálculo que servem para definir uma álgebra de Morgan, mas não assinala a igualdade de Kalman (K).

Seja E dado um conjunto dado, não vazio, e A uma álgebra de Kleene arbitrária então o conjunto

$$P = A^E$$

de todas as aplicações de E em A algebrizadas ponto por ponto é uma álgebra de Kleene. [P, $\wedge$, $\vee$ $\sim$, 1] (1).

Se tomarmos A = [0, 1] como no exemplo 3, então P é *a família* **Z** *dos conjuntos graduados de Zadch, que é portanto uma álgebra de Kleene.*

Consideremos o exemplo particular dos divisores

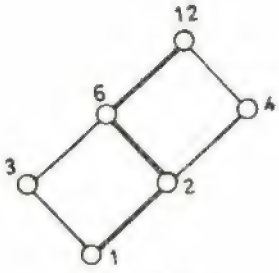


Fig. 6.3

de 12, ordenados pela relação divide. O seu diagrama está indicado na fig. 6.3. A *negação* de acordo com o exemplo 6 será dada por $\sim 1 = \frac{12}{1} = 12$, $\sim 2 = \frac{12}{2} = 6$ $\sim 3 = 4$, $\sim 6 = 2$, $\sim 4 = 3$, $\sim 12 = 1$.

O conjunto {1, 2, 6, 12} ordenado pela relação

Fig. 6.4

divide, cujo diagrama está indicado na fig. 6.4 é uma sub-álgebra da álgebra de Kleene da fig. 6.3, que tem por primeiro elemento 1 e por último elemento 12.

EXEMPLO 7

Seja E um espacio topológico e C (E) o conjunto de todas as funções numéricas (2) contínuas em todos os pontos de E. Dadas duas funções f, g ε C(E), consideremos as funções *(Contínuas sobre E)* $a = f \wedge g$, $b = f \vee g$ definidas pelas fórmulas

$$a(x) = \min (f(x), g(x))$$

$$b(x) = \max (f(x), g(x))$$

Seja $\sim f$ a função continua definida pela igualdade

$$(\sim f)(x) = -f(x)$$

então o sistema (C (E), $\wedge$, $\vee$, $\sim$) é um reticulado de Kleene, que não tem último elemento.

Põe-se naturalmente, como no caso das Álgebras de Morgan, o problema de saber quais as identidades válidas em todas as álgebras de Kleene. Este problema foi resolvido por J. Kalman (1958), que demonstrou o seguinte resultado.

6.2 — *TEOREMA. Toda a álgebra (reticulado) de Kleene, com mais de um elemento é isomorfa (isomorfo) a uma sub-álgebra de um produto cartesiano de álgebras (reticulados)* M_3 (J. Kalman [1958] de donde resulta que:

(1) 1 representa a aplicação identicamente igual a 1.
(2) Isto é f(x) ε R, para todo x ε E.

6.3 — *TEOREMA. A álgebra (reticulado) M_3 é uma álgebra característica para as álgebras (reticulados) de Kleene.* (J. Kalman [1958]).

Isto significa que duas formas polinomiales de n variáveis $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$ são idênticas em todas as álgebras de Kleene si e solamente se elas forem idênticas em M_3 isto é se

$$p_{M_3}(x_1, \ldots, x_n) = q_{M_3}(x_1, \ldots, x_n)$$

Observando que M_3 é a matriz utilizada por Kleene [1938] para definir o cálculo proporcional K_3, vemos pelo Teorema 6.3 de Kalman, que as identidades que podem deduzir-se dos axiomas que caracterizam a noção de (reticulado) ou de álgebra de Kleene coincidem com as identidades que valem em M_3. Isto mostra que o conjunto das identidades que valem em M_3, pode ser caracterizada por um conjunto finito de axiomas, dados por igualdades, a partir das quais se deduzem todas as outras utilizando as regras da lógica. Para expressar esta situação diz-se que a Matriz M_3 introduzida por Kleene é *finitamente axiomatizável.*

Observemos que a álgebra de Kleene dos conjuntos graduados de Zadeh é uma álgebra de Kleene particular. Pode então por-se o problema de saber se não haverá alguma identidade válida em toda a álgebra de Kleene da forma

$$\mathbf{Z} = [0,1]^E$$

onde E é um conjunto não vazio e que não seja válida em todas as álgebras de Kleene:

É claro que toda a identidade válida na álgebra de Kleene [0,1] é válida em **Z**, visto que **Z** é um produto cartesiano de álgebras [0,1] e reciprocamente.

Trata-se então de saber se há alguma identidade válida em [0,1] e que não sseja válida em todas as álgebras de Kleene.

Notemos que o conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ é uma sub-álgebra de [0,1] visto que o conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ é fechado para as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$ e contém o elemento 1. Vê-se em seguida que esta sub-álgebra de [0,1] é isomorfa a M_3.

Portanto toda a identidade válida em [0,1] é válida em M_3 e então, em virtude do teorema de Kalman é válida em todas as álgebras de Kleene e em particular em $\mathbf{Z} = [0,1]^E$.

Podemos portanto afirmar que

6.4 — *TEOREMA M_3 é uma álgebra característica para a classe das álgebras de Kleene da forma $\mathbf{Z} = [0,1]^E$ onde E é um conjunto não vazio.*

Existe um problema análogo para o conjunto R dos números reais, sobre o qual se definem as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$, da maneira indicada no exemplo 2; temos então o reticulado de Kleene $(R, \vee, \wedge, \sim)$. Dadas duas formas polinoniales $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$. Sabemos que se

$$(1) \quad p_{M_3}(x_1, \ldots x_n) = q_{M_3}(x_1, \ldots, x_n)$$

então

$$p_R(x_1, \ldots, x_n) = q_R(x_1, \ldots, x_n)$$

visto que sendo R um reticulado de Kleene ele é isomorfo a um sub-álgebra de um produto de reticulados de Kleene M_3. Então se (1) vale então M_3 vale em qualquer produto cartesiano de reticulados M_3 e também em qualquer sub-reticulado de Kleene desse produto e portanto em R.

Pode perguntar-se se não haverá alguma identidade f = g válida em R e que não seja válida em todos os reticulados de Kleene.

Observemos que o conjunto $T = \{-1, 0, 1\}$ é uma sub-álgebra do reticulado de Kleene $(R, \vee, \wedge, \sim)$, cujo diagrama está marcado na fig. 6.5, ao lado do diagrama de M_3 (fig. 6.6). É claro que como reticulados M_3 e T são isomorfos. Observe-se que em T: $\sim 1 = -1$, $\sim 0 = 0$, $\sim(-1) = 1$ e em M_3

Fig. 6.5

Fig. 6.6

$$\sim 1 = 0, \ \sim \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}, \ \sim 0 = 1$$

logo a transformação φ de T sobre M_3 definida por $\varphi(-1) = 0$, $\varphi(0) = \frac{1}{2}$, $\varphi(1) = 1$ é um isomorfismo de T sobre M_3. Portanto se vale a igualdade $f_R = g_R$ ela vale também no sub-reticulado de Kleene T de R e vale portanto em M_3 isto $f_{M_3} = g_{M_3}$. Logo as identidades que valem em R são as que valem em todos os reticulados de Kleene.

Dum modo mais geral:

6.5 — *TEOREMA. Se uma álgebra (reticulado) de Kleene A contém uma sub-álgebra (sub-reticulado de Kleene) isomorfa a M_3, então para que uma igualdade seja válida em A ($p_A = q_A$) é necessário e suficiente que ela seja válida em M_3 e será então válida em todas as álgebras (reticulados) de Kleene.* (J. Kalman).

Existe uma classe particular de álgebras de Kleene, que são as que verificam a igualdade

$$(1) \quad x \wedge \sim x = 0$$

de donde resulta

$$(2) \quad x \vee \sim x = 1$$

São as chamadas *álgebras de Boole* entre as quais figura a álgebra de Boole com dois elementos $M_2 = \{0,1\}$ definida pelas tábuas

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

x	$\sim$ x
0	1
1	0

As igualdades (1) e (2) são verificadas em M_2 mas não são verificadas em M_3 visto que $\frac{1}{2} \wedge \sim \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$; $\frac{1}{2} \vee \sim \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$.

Observe-se que M_2 é uma sub-álgebra de M_3 e M_4 e que M_3 é isomorfa a uma sub-álgebra de M_4.

Os resultados mais importantes sobre as álgebras de Boole foram obtidos por M. H. Stone. [1934], [1935], [1936], [1937] entre os quais destacamos os seguintes:

6.5 — *TEOREMA. Toda álgebra de Boole, com mais de um elemento, é isomorfa a uma sub-álgebra de um produto cartesiano de álgebras M_2.*

6.6 — *TEOREMA. M_2 é uma álgebra característica para as álgebras de Boole;* o mesmo acontece com toda álgebra de Boole com mais de um elemento.

Para as álgebras de Kleene pode demonstrar-se que

6.7 — *TEOREMA. Toda álgebra de Kleene A, com mais de um elemento, que não seja uma álgebra de Boole, é uma álgebra característica para a classe das álgebras de Kleene* (J. Kalman).

É claro que a álgebra característica M_3 para a classe das álgebras Kleene é a menor de todas, porque uma álgebra de Kleene com dois elementos é a álgebra de Boole M_2, que não é característica para a classe das álgebras de Kleene.

O seguinte teorema permite averiguar se sobre um reticulado distributivo finito A dado, pode definir-se uma estrutura de álgebra de Kleene.

TEOREMA. Para que num reticulado distributivo finito A seja possível definir uma estrutura de Álgebra de Kleene é necessário e suficiente que sobre o conjunto ordenado $(\pi, \leq)$ de todos os elementos primos de A exista uma involução ψ de π sobre π que verifique a condição.

(K) Para todo $p \in \pi$ ou $\psi(p) \leq p$ ou $p \leq \psi(p)$. A. Monteiro [1960], [1963].

Consideremos o reticulado distributivo A, indicado na figura 6.7, onde os elementos primos estão marcados em negro, os diagramas de π e o do seu dual π^* estão também indicados. O único isomorfismo ψ de π sobre π^* é $\psi(c) = b$, $\psi(b) = c$, $\psi(a) = d$, $\psi(d) = a$ e como ψ tem período 2; pode definir-se sobre A uma única estrutura de Álgebra de Morgan; mas sobre A não pode definir-se uma estrutura de álgebra de Kleene porque $\psi(a) = d$ é incomparável com a.

7 — OS CONJUNTOS VAGOS DE GENTILHOMME

Indiquemos em primeiro lugar uma construção indicada por Gr. C. Moisil [1940] pág. 450, [1941](1), [1972] pág. 214).

Seja B uma álgebra de Boole e consideremos o conjunto A de todos os pares $x = (x_1, x_2)$ de elementos de B tais que $x_1 \leq x_2$.

Definamos as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$ sobre A da seguinte maneira, onde $x = (x_1, x_2) \in A$, $y = (y_1, y_2) \in A$

$$x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2)$$
$$x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2)$$
$$\sim x = (-x_2, -x_1); \; 1 = (1,1)$$

onde $-b$ é o complemento booleano de $b \in B$. Então Moisil provou que

7.1 — *O SISTEMA* (A, $\wedge$, $\vee$, 1) *é uma álgebra de Morgan;* o que é fácil de verificar.

Podemos mesmo afirmar que

7.2 — *O SISTEMA* (A, $\wedge$, $\vee$, 1) *é uma álgebra de Kleene.*

O objectivo de Moisil era construir um modelo algébrico do cálculo proposicional trivalente de Lu-

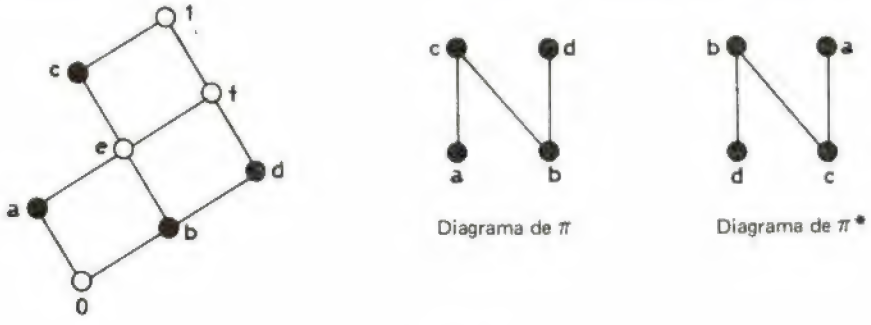


Fig. 6.7

(1) Ver também A. Rose [1950].

siewicz e por isso definia sobre A uma outra operação μ dada pela fórmula

$$\mu x = \mu (x_1, x_2) = (x_2, x_2)$$

que vamos deixar de lado.

A demonstração de 7.1 e 7.2 obtém-se por cálculos elementares.

Y. Gentillome na sua tese de doutoramento [1967] e em [1968], tendo em vista aplicações à linguística, considera uma construção análoga. Seja dado um conjunto fixo E e seja $B = 2^E$ o conjunto de todas as partes de E que é uma álgebra de Boole particular.

Então este autor dá o nome de *Conjunto vago* de E a um par $X = (X_1, X_2)$ de sub-conjuntos de E tais que

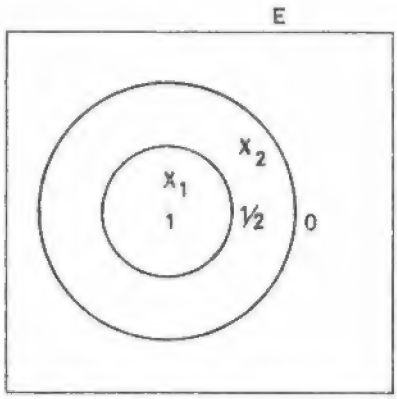


Fig. 7

$X_1 \subseteq X_2$ e chama X_2 a *zona de extensão máxima* e X_1 a *zona de extensão mínima* do conjunto vago X. Ao conjunto $X_2 - X_1 = X_2 \cap C X_1$ dá o nome de *zona vaga de X*.

Este autor algebriza a família **V** de todos os conjuntos vagos, como o fez Moisil em 1940, assinalando que valem as regras de cálculo que usámos para definir uma álgebra de Morgan. Observemos que os pares

$$O = (\phi, \phi) \quad 1 = (E, E)$$

são o primeiro e último elemento da Álgebra de Morgan $< \mathbf{V}, \cap, \cup, \sim, 1 >$. As operações $\cap$ $\cup$ (intersecção e união) correspondem às operações $\wedge$ e $\vee$ indicadas no caso mais geral considerado por Moisil. Entretanto Gentillome e Moisil, não assinalam que o sistema obtido é uma álgebra de Kleene.

Seja $X = (X_1, X_2)$ um conjunto vago do universo E. Escreveremos $p \varepsilon X$ (onde $X \subseteq E$) para indicar que «o ponto p *pertence ao conjunto* X». Usaremos a notação $p \in X$ para indicar que «*o ponto p pertence ao conjunto vago* $X = (X_1, X_2)$». Vamos usar a lógica trivalente de Kleene onde há três valores lógicos 0, ½, 1. Usaremos a notação $v(p \in X)$ para indicar o valor lógico do enunciado «$p \in X$».

De acordo com Moisil [1941](*) poremos por definição

$$(1) \quad v(p \in x) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \varepsilon X_1 \\ \tfrac{1}{2} \text{ se } p \varepsilon X_2 - X_1 \\ 0 \text{ se } p \bar{\varepsilon} X_2 \end{cases}$$

Sabemos que se $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$ são dois conjuntos vagos de E, a sua intersecção está definida por

$$X \cap Y = (X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2)$$

então pela definição anterior

$$x(p \in X \cap Y) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \varepsilon X_1 \cap Y_1 \\ \tfrac{1}{2} \text{ se } p \varepsilon X_2 \cap Y_2 - (X_1 \cap Y_1) \\ 0 \text{ si } p \bar{\varepsilon} X_2 \cap Y_2 \end{cases}$$

Dum modo geral dado um conjunto vago X representemos por $V(X)$ o conjunto dos pontos $p \varepsilon E$ tais que $v(p \in X) = 1$, por $T(X)$ o conjunto dos pontos $p \varepsilon E$ tais que $v(p \in X) = \tfrac{1}{2}$ e $F(X)$ o conjunto dos pontos $p \varepsilon E$ tais que $v(p \in X) = 0$.

É claro que pela fórmula (1) temos

$$(e) \quad V(X) = X_1; \; T(X) = X_2 - X_1, \; F(X) = C X_2$$

Os conjuntos $V(X)$, $T(X)$, $F(X)$ são disjuntos dois a dois e a sua reunião é

$$V(X) \cup T(X) \cup F(X) = E(^2)$$

A função $v(p \in X)$ definida sobre E e tomando seus valores no conjunto $M_2 = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}$ de acordo com a fórmula (1) daremos o nome de *função característica do conjunto vago X*, e escreveremos $K(X)$.

Reciprocamente seja dada uma aplicação f de E em M_3, e seja $V(f) = f^{-1}(1)$, $T(f) = f^{-1}(\tfrac{1}{2})$, $F(f) = f^{-1}(0)$, então existe um e um só conjunto vago $X = (X_1, X_2)$ que tem por função característica a função dada f, com efeito: ponhamos $X_1 = V(f)$ e $X_2 = V(f) \cup T(f)$ então o conjunto vago: $X = (X_1, X_2)$ tem por função característica a função dada f, isto é $f = K(X)$.

Temos assim por um lado a álgebra de Kleene **V** de todos os conjuntos vagos sobre o universo E e por outro lado a álgebra de Kleene $\mathbf{F} = M_3^E$ de todas as aplicações de E em M_3 algebrizadas ponto por ponto.

A este respeito podemos afirmar que

(1) Moisil introduziu esta ideia no estudo das álgebras de Lukasiewicz trivalente em [1941] e no caso dos conjuntos vagos em [1972-5].

(2) Entretanto os conjuntos V(X), T(X), F(X) não formam uma tripartição de E porque alguns deles podem ser vazios.

7.1 — *TEOREMA. As álgebras de Kleene* **V** *e* **F** *são isomorfas.*

Para demonstrar este teorema basta provar que se fizermos corresponder a cada conjunto vago X a sua função característica $K(X)$, definida anteriormente, então

1.º) K é uma aplicação biunívoca de **V** sobre **F**

2.º) $K(X \cap Y) = K(X) \wedge K(Y)$

3.º) $K(\sim X) = \sim K(X)$

4.º) $K(1) = 1$, onde $1 = (E, E,)$ é o último elemento de **V** e 1 é a função identicamente igual a 1 sobre E.

Usando a regra de cálculo

$$X \cup Y = \sim (\sim X \cap \sim Y)$$

de 2.º) e 3.º) deduz-se

5.º) $K(X \cup Y) = K(X) \vee K(Y)$

A demonstração faz-se mediante cálculos que serão considerados mais ou menos simples, segundo a experiência do leitor.

Ilustremos este teorema com um exemplo simples. Tomemos um universo $E = \{1, 2\}$ com dois pontos. A família $B = 2^E$ de todas as partes de E está indicada no diagrama da fig. 7.2. A família **V**

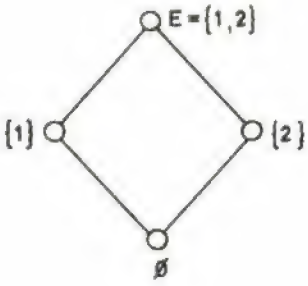


Fig. 7.2

de todos os conjuntos vagos definidos sobre E está dada por

$$O = (\phi, \phi),\ A = (\phi, \{2\}$$

$$B = (\phi, \{1\},\ C = (\phi, E)$$

$$D = (\{2\}, \{2\}),\ E = (\{1\}, \{1\})$$

$$F = (\{2\}, E),\ G = (\{1\}, E)$$

$1 = (E, E)$ (*). A relação de ordem entre dois conjuntos vagos $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$ define-se pelas duas condições $X_1 \subseteq Y_1$, e $X_2 \subseteq Y_2$. Então o diagrama de **V** está indicado na figura 7.3.

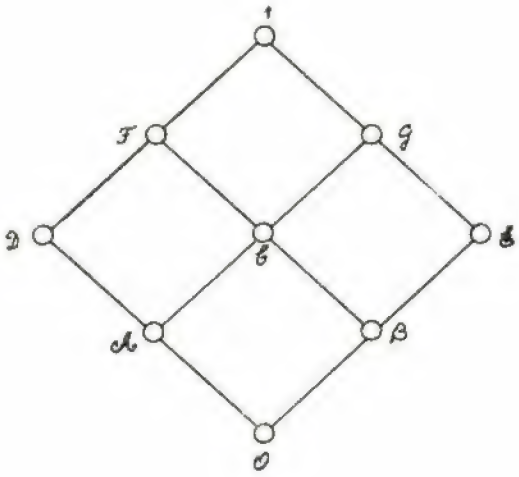


Fig. 7. 3

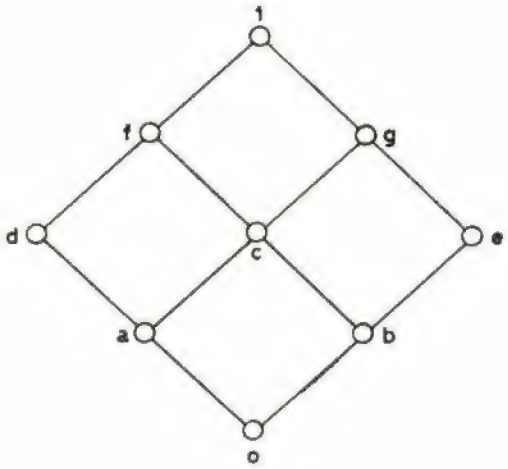


Fig. 7.4

Para representar uma função $f \in K_3$ escreveremos $f = (f_1, f_2)$ onde $f_1 = f(1)$, $f_2 = f(2)$.

As diversas funções características são dadas por $K(O) = (0,0) = o$ $K(A) = (0, \frac{1}{2}) = a$, $K(B) = b = (\frac{1}{2}, 0)$ $K(C) = c = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $K(D) = d$ $(0,1)$, $K(E) = e = (1,0)$ $K(F) = f = (\frac{1}{2}, 1)$, $K(G) = g = (1, \frac{1}{2})$, $K(1) = (1,1) = 1$.

As funções características ordenam-se ponto por ponto, isto é: se $h = (h_1, h_2)$ e $j = (j_1, j_2)$ então $h \leq j$ só e somente se $h_1 \leq h_2$ e $h_2 \leq j_2$. O diagrama

(*) Observe que os conjuntos vagos *O, D, E* e 1 têm uma zona vaga vazia.

de M_3^E está indicado na figura 7.4, os reticulados distributivos das figuras 7.3 e 7.4 são isomorfos.

Nestes dois reticulados a operação de negação está dada pelas tábuas:

X	$\sim X$
O	1
A	G
B	F
C	C
D	E
E	D
F	B
G	A
1	O

$K(X)$	$\sim K(X)$
o	1
a	g
b	f
c	c
d	e
e	d
f	b
g	a
1	o

Pela simples inspecção das figuras 7.3 e 7.4 verifica-se que K é um isomorfismo de **V** sobre K_3^E.

Este teorema permite afirmar que se o universo E tem n pontos então a família **V** de todos os conjuntos vagos tem 3^n elementos distintos.

Recordemos que de acordo ao Teorema 6.2 toda álgebra de Kleene A é isomorfa a uma sub-álgebra da álgebra de Kleene

$$\mathbf{F} = M_3^E$$

onde E é um conjunto convenientemente escolhido. Pelo teorema 7.3 sabemos que $\mathbf{F}_3$ é isomorfa à álbra **V** de todos os conjuntos vagos definidos sobre o universo E e portanto *toda álgebra de Kleene A é isomorfa a uma sub-álgebra de* **V**(1). Podemos portanto afirmar que a álgebra de Kleene considerada por Zadch

$$\mathbf{Z} = [0,1]^E$$

é isomorfa a uma sub-álgebra da álgebra **V** de todos os conjuntos vagos definidos sobre um universo E* convenientemente escolhido.

8 — ÁLGEBRAS LIVRES E INJECTIVAS

A noção de álgebra livre tem uma grande importância. Seja A uma álgebra de Morgan. Seja G uma parte de A, diz-se que *G é um conjunto de geradores de A* se A for a menor sub-álgebra de A que contém G.

Diz-se que G é *um conjunto de geradores livres de A*, se dada uma álgebra de Morgan A' que tem um conjunto G' de geradores tal que a potência de G' é igual ou menor que a potência de G, então dada uma aplicação unívoca f de G sobre G' existe um homomomorfismo h de A sobre A', que é uma extensão de f, isto é para $g \in G$: $h(g) = f(g)$.

Uma *álgebra de Morgan* A *diz-se livre se tem um conjunto G de geradores livres.*

As álgebras de Morgan com um conjunto G de geradores livres de potência dada c foram descritas por O. Chateaubriand e A. Monteiro [1969].

No caso particular em que c é um número natural n então a álgebra de Morgan livre com n geradores livres L(n) é finita.

Pela própria definição L(n) é *a maior álgebra de Morgan com n geradores.* Representemos por N(X) o número de elementos do conjunto X. Sabe-se que

$$N(L(1)) = 6 \quad N(L(2)) = 168$$

Mas não se conhece uma fórmula que dê o número N(L(n)).

Para o caso das álgebras de Kleene livres cuja definição é análoga tem-se

$$N(L(1)) = 6 \quad N(L(2)) = 84$$

Este último resultado foi indicado por J. Berman e Ph. Dwinger, num importante trabalho no qual dão uma descrição das álgebras de Kleene com c geradores livres.

R. Cignole, num trabalho não publicado, indicou uma construção geométrica das álgebras de Kleene com c geradores livres, usando, nas suas linhas gerais, a técnica usada em O. Chateaubriand e A. Monteiro [1969].

No caso particular dos reticulados de Kleene (onde não se postula a existência de um último elemento) tem-se

$$N(L(1)) = 4; \qquad N(L(2)) = 82^{(2)}$$

Daqui resulta em particular que dadas duas funções numéricas contínuas num espaço topológico E (por exemplo na recta) — veja Exemplo 7 — então 82 é o número máximo de funções contínuas que podem obter-se a partir de f e g efectuando as operações $\wedge$, $\vee$ e $-$. Não se conhece uma fórmula que dê o número N(L(n)) no caso dos reticulados de Kleene.

(1) Este resultado generaliza um resultado análogo obtido por Moisil [1941] para as álgebras de Lukasiewicz trivalentes.

(2) Este resultado também foi obtido usando o computador do Lab. de Física e Energia Nuclear pela licenciada Maria Manuel Costa Freitas.

Acontece que entre alguns dos geradores de uma álgebra de Morgan pode existir uma relação de *ordem* (por exemplo $g_1 \leq g_2$).

A determinação das *álgebras de Morgan livres sobre um conjunto ordenado* $\{G, \leq\}$ *de geradores* foi obtida por L. Monteiro [1967], [1974].

Uma *álgebra de Morgan I* (ou de Kleene) diz-se *injectiva* se dada 1.º) uma álgebra A; 2.º) uma sub-álgebra S de A; 3.º) um homomomorfismo h de S em I; então existe um homorfismo H de A em I que é uma extensão de h, isto é: $H(s) = h(s)$ para todo $s \in S$.

As álgebras de Morgan e de Kleene injectivas foram determinadas por R. Cignole [1975].

Um problema que seria importante resolver é o seguinte: dada um reticulado de Morgan (ou de Kleene) finito A, determinar o menor número de elementos de A que geram A; um problema análogo foi resolvido para os reticulados distributivos finitos (A. Monteiro, [1968]).

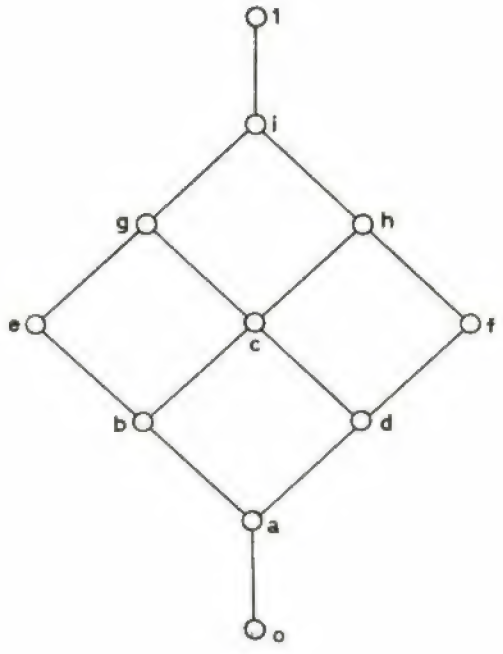


Fig. 9.1

9 — ÁLGEBRAS CENTRADAS

Daremos o nome de centro de um reticulado de Morgan a todo elemento c tal que $\sim c = c$. A álgebra K_4 tem dois centros a e b. J. Makinson observou (1) que um reticulado de Kleene A não pode ter mais do que um centro; com efeito si c e c' são centros de A então $c = c \wedge \sim c \leq c' \vee \sim c' = c'$ isto é $c \leq c'$ e do modo análogo se prova que $c' \leq c$ logo $c = c'$. Mas é claro que existem reticulados de Kleene que não têm nenhum centro como se vê nas figuras 6.3 e 6.4.

Recordemos os reticulados de Kleene considerados anteriormente no §6: *o Exemplo 1* tem por centro ½; o Exemplo 2 tem por centro 0, etc. A álgebra de Kleene **V** dos conjuntos vagos sobre um universo E, tem por centro $C = (\phi, E)$.

Se na definição de uma álgebra (ou reticulado) de Kleene A se postula que existe um elemento c tal que $\sim c = c$, diz-se que A é uma álgebra (reticulado) de Kleene centrada(2) (centrado). Seria importante determinar as álgebras de Kleene centradas com um número finito de geradores livres.

A álgebra de Kleene centrada com um gerador livre tem 11 elementos cujo diagrama está indicado na figura 9.1. A negação de Morgan está dada por $\sim 0 = 1$, $\sim a = i$, $\sim b = h$, $\sim d = g$, $\sim c = c$ $\sim f = e$. A lei da dupla negação $\sim\sim x = x$ permite obter a negação dos restantes elementos. O gerador livre é f ou e. Este resultado foi obtido com cálculos manuais. Enquanto que a álgebra de Kleene com um gerador livre indicada na figura 9.2 tem 6 elementos. [A negação de Morgan está dada por $\sim 0 = 1$, $\sim a = d$, $\sim b = c$].

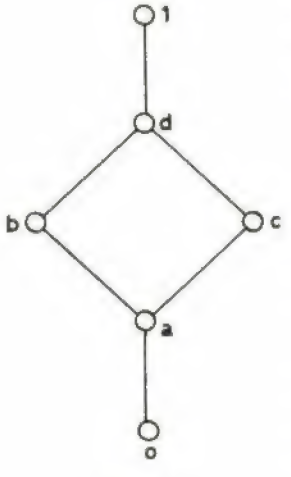


Fig. 9.2

Não se conhece o número de elementos das álgebras com n geradores livres, para as seguistes classes de álbras:

1.º) reticulados distributivos; 2.º) álgebras de Morgan; 3.º) álgebras de Kleene; 4.º) álgebras de Kleene centradas, excepto nalguns com particulares 1.º) n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,; 2.º) n=1, 2, 3; 3.º) n=1, 2; 4.º) n = 1.

O *reticulado de Kleene centrado* com um gerador livre f tem 9 elementos. O seu diagrama obtém-se a partir da fig. 9.1 suprimindo os elementos 0 e 1.

O reticulado de Kleene das funções numéricas contínuas C(E) de um espaço topológico E. (Veja Exemplo 7, do § 6) tem por centro a função 0 (identicamente igual a 0). Então se consideramos C(E) como um reticulado de Kleene centrado podemos

(1) Ver L. Monteiro [1974-a].
(2) Teremos agora um sistema $(A, \wedge, \vee, \sim, 1, c)$ onde são dados dois elementos fixos 1 e c de A.

afirmar que efectuando as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$ a partir de uma função contínua dada f e da *constante* o podem obter-se *quando* muito 9 funções contínuas, mas é fácil encontrar exemplos em que esse número é menor que 9. Quem disponha de um computador pode determinar facilmente o reticulado de Kleene centrado com dois geradores livres, que terá mais que 82 elementos(1).

10 — A IMPLICAÇÃO

Uma álgebra de Kleene pode, ser enriquecida com a introdução de novas operações unárias, binárias, etc. e põe-se naturalmente o estudo das novas álgebras assim obtidas.

O operador de implicação $a \rightarrow b = \sim a \vee b$ definido nas álgebras de Morgan e de Kleene não têm propriedades interessantes. Existem entretanto outros operadores de implicação (de Lukasiewicz, intuionista, construtiva, etc.) que podem definir-se no segmento [0,1]; então $Z = [0,1]^E$ terá uma estrutura algébrica mais complexa. Se pomos

$$a \rightarrow b = \min(1,\ 1 - x + y)\text{(2)}$$

temos um cálculo proposicional considerado pela primeira vez por J. Lukasiewicz [1930], que foi um dos fundadores das lógicas não clássicas. Entramos assim no campo dos lógicas polivalentes, que se encontra actualmente em pleno florescimento, em parte devido às suas aplicações (circuitos, programação, reconhecimento de formas etc.). Convém recordar neste momento, que foi J. Lukasiewicz que iniciou em [1920] — juntamente com Post [1921] — o estudo das lógicas polivalentes com a consideração de um cálculo proposicional tri-valente(3), motivado pelo seguinte enunciado *«amanhã haverá uma batalha no mar»*, que tinha sido considerado por Aristóteles. J. Lukasiewicz inquiria sobre o valor lógico do referido enunciado: verdadeiro? falso? ou desconhecido? Meditando sobre esta questão foi levado a considerar um cálculo proposicional trivalente (independentemente de qualquer questão prática). Trata-se de um acontecimento de grande importância na história da lógica e da matemática.

Em 1959 as escolas russa (V. I. Shestakov) e romena (Gr. C. Moisil) encontraram (ver Moisil [1969] aplicações das lógicas polivalentes à teoria dos circuitos e dos autómatos (para referências bibliográficas (ver Moisil [1972], pág. 782-786).

Para uma vista panorâmica de introdução às lógicas polivalentes (até 1969) ver Rescher [1969]. Um artigo importante sobre as relações entre as lógicas polivalentes e as ciências da computação deve-se a G. Epstein-C. Frieder e D. Rins [1974]. Um livro sobre algumas lógicas não clássicas consideradas sob o ponto de vista da álgebra foi escrito por Helena Rasiowa [1974]. Exemplos de aplicações da teoria dos conjuntos graduados de Zadeh encontram-se em A. Kaufman [1975].

Este artigo pode ser considerado como uma introdução e um programa para o estudo das álgebras de Morgan e de Kleene.

11 — BIBLIOGRAFIA

[1] — **Berman (J.) and Dwinger (Ph.)** — De Morgan algebras: free produts and free algebras. (**préprint**).

[2] — **Bialynicki-Birula (A.)** [1957] — Remarks on quasi — Boolean Algebras «Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 615-619».

[3] — **Bialynicki-Birula (A.)** and **Rasiowa (H.)** [1957] — On the representation of quasi — Boolean Algebras «Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 259-261».

[1958] — On constructive falsity in the constructive logic with strong negation. «Colloquium Mathematicum 6 (1958), 287-291».

[4] — **Birkhoff (G.)** [1933] — On the combination of subalgebras. «Proc. Camb. Phil. Soc. 29 (1933), 441-464».
[1937] — Rings of Sets. «Duke Mathematical Journal, 3 (1937), 443-454».

[5] — **Birkhoff (G.)** [1948] — Lattice Theory. «American Mathematical Society, 1948».

[6] — **Birkhoff (G.)** and **Frink (O.)** [1948] — Representation of lattices by sets. «Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 299-316».

[7] — **Chateaubriand (O.) et Monteiro (A.)** [1969] — Les algèbres de Morgan libres. «Notas de Lógica Matemática» N.º 26 (1969). «Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahia Blanca».

[8] — **Cignole (R.)** [1975] — Injective de Morgan and Kleene alebras. Proc. American Math. Soc. 47 (1975) 269-278.

[9] — **De Kerf** (Joseph. L. F.) [1975] — A Bibliography on fuzzy sets. «Journal of computational and Applied Mathematics. Vol. 1, n.º 3 (1975) — p. 205-210».

(1) O engenheiro César Alves do Laboratório de Cálculo Automático da Fac. de Ciências do Porto elaborou um programa que lhe permitiu determinar, em 24 segundos, a álgebra de Kleene centrada com 2 geradores livres cujo número de elementos é 195. Este resultado foi também obtido pela licenciada Maria M. C. Freitas.

(2) Sobre outros operadores de implicação ver De Luca (A.) e Termini (G.) [1970] [1972], Rasiowa [1974].

(3) Distinto do cálculo trivalente de Kleene [1938].

EM LÍNGUA PORTUGUESA

Manual de Iluminação

editado pela Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, Holanda

Principais capítulos:

ILUMINAÇÃO INTERIOR E EXTERIOR
ILUMINAÇÃO PARA PRÁTICA DE DESPORTOS
APLICAÇÕES ESPECIAIS
PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA LUZ
TABELAS
ESQUEMAS DE ILUMINAÇÃO
ORGANIZAÇÕES INTERNACIONAIS
ÍNDICE DE PUBLICAÇÕES DIVERSAS

Formato de bolso
Preço — 200$00
acrescido do porte de correio

Pedidos para:

PHILIPS PORTUGUESA, SARL
Departamento de Iluminação
Av. Engº Duarte Pacheco, 6 • LISBOA 1

ESPIRAL CT 1659/75

TOPOGRAFIA GERAL

1.º VOLUME

Pelo Engenheiro

A. C. XEREZ

❋

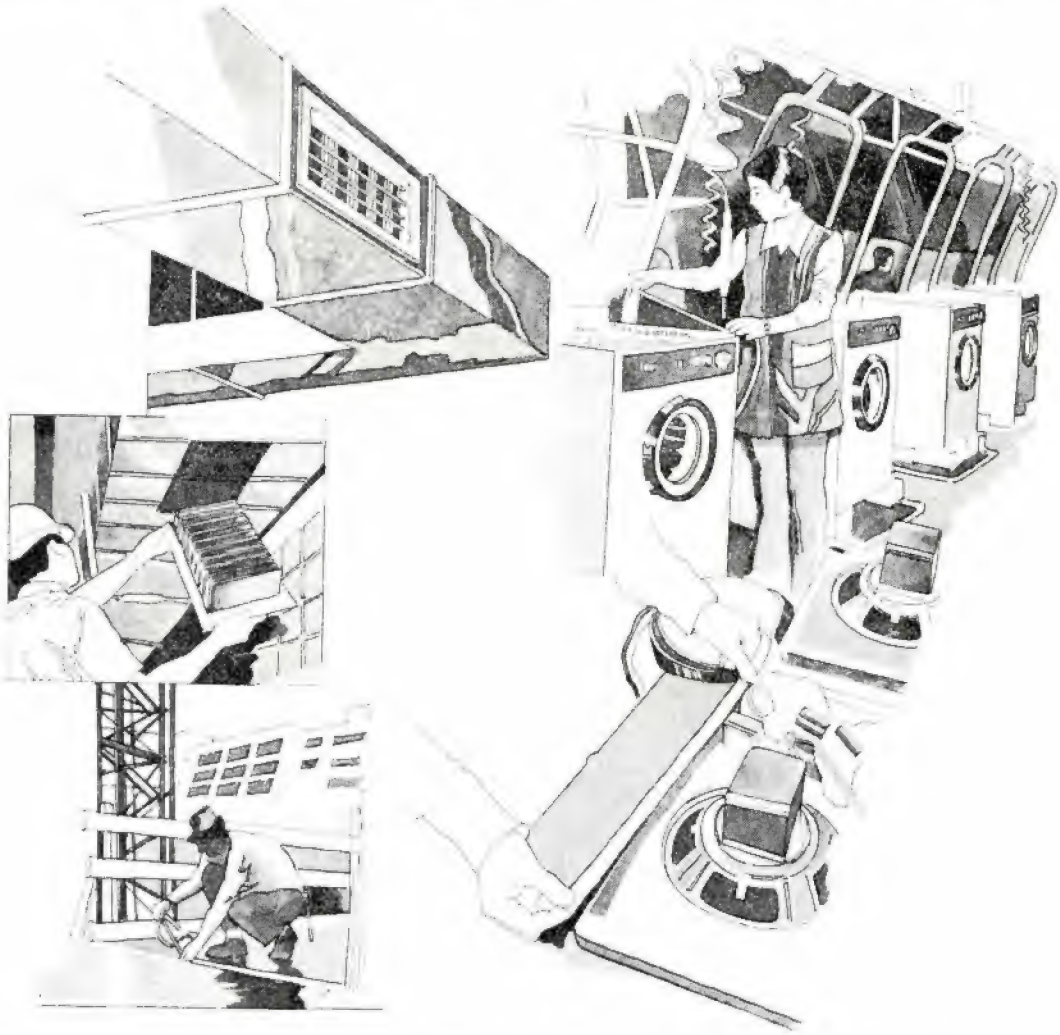
Preço de cada volume 350$00

❋

DESCONTO:
10 o/o aos Assinantes

PEDIDOS À TÉCNICA

Tesamoll
a fita auto-adesiva
para proteger e calafetar.



Há objectos ultra-sensiveis que necessitam da maior protecção.
Tesamoll calafeta e absorve choques e vibrações.
Tesamoll reune a função protectora da espuma sintética às vantagens das fitas auto-adesivas. É mais económica porque dispensa a utilização de colas; basta cortar, separar a folha de protecção e pronto! Eficiente. Suave, fácil de aplicar e altamente versátil. Tesamoll é ideal para calafetar, amortecer, vibrações e proteger todos os materiais sensíveis durante o transporte e armazenamento.

Tesamoll, uma gama completa; cada variedade um sem número de aplicações para uma quantidade de indústrias.

tesa

DEPARTAMENTO INDÚSTRIA

Tesa, sempre a solução do seu caso.

PARA MAIS INFORMAÇÕES CONSULTE O DEPARTAMENTO TESA DA BEIERSDORF PORTUGUESA, LDA.
Est. de Barcarena - Queluz de Baixo Tel 95 61 71 ou Delegação no Norte - R. Gonçalo Sampaio, 164-178 - Porto Tel 69 11 53/4/5

[10] — **De Luca (A.)** and **Termini (S.)** [1970]—Some algebraic properties of fuzzy sets (Abstract). «Notices of American Mathematical Society. 17 (1970) 944».

[1972] — Algebraic properties of fuzzy sets. «Journal of Mathematical Analysis and Applications 40 (1972) 373-386».

[11] — **Gastaminza (M. L.)** and **Gastaminza (S.)** [1968] — Caracterisation of the Morgan lattices by the operation of implication and negation. «Proc. Japan Acad. 44 (1968), 659-662».

[12] — **Epstein (G.), Frieder (G.)** and **Ring (D.)** [1974] — The development of multiple-valued logic as related to computer Science. «Computer» 7 (1974), 20-30.

[13] — **Gentilhomme (Y.)** [1967] — Étude structurale d'une terminologie. Essai methodologique. «Thèse soutenue à l'Ecole Pratique des Hautes Études. Paris 1967».

[1968] — Les ensembles flous en linguistique. «Cahiers de linguistique théorique et apliquée. Bucarest, V, 47 (1968)».

[14] — **Iseki (Kiyosi)** [1950] — Une condition pour qu'un lattice soit distributif. «C. R. de l'Académie des Sciences de Paris. 230 (1950) 1726--1727».

[1952]—Contribution to lattice theory. «Publ. Math. Debrecen 2 (1952), 194-203.

[15] — **Kalman (J. A.)** [1958] — Lattices with involution. «Transactions of American Mathematical Society 87 (1958), 485-491».

[16] — **Kaufmann (A.)** [1975] — Introduction à la théorie des ensembles flous. Tome 1. «Masson & Cie. Paris, 1975. Tome 2. Id. 1975. Tome 3 (en preparation)».

[17] — **Kleene (St.c)** [1938] — On notation for ordinals numbers. «J. of Simbolic Logic 3 (1938), 150-155».

[1952] — Introduction to Methamathematics. «Nort-Holland Pub. Co. Amsterdam 1952».

[18] — **Lukasiewicz (J.)** [1920] — On 3 — valued logic (em polaco). «Ruch Filosoficzny. 5 (1920) 169-171.

[1970]. Selected Warks edited by L. Borkowski North-Holland Pub. Co. Amsterdam. 1970.

[19] — **Lukasiewicz (J.)** and **Tarski** [1930] — Unterschungen über der Aussagenkalkül. «Comptes rendus des scéances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Classe III, vol. 23 (1930) pp. 1-21, 30-50». Traduçãa inglesa em Tarski [1956].

[20] — **Maronna (A.)** [1964] — A caracterization of Morgan lattices. «Portugalia Math. 23 (1964), 169-171». Preprint em «Notas de Lógica Matemática N.º 18».

[21] — **Moisil (Gr. C.)** [1935] — Recherches sur l'algèbre de la logique. «Ann. Sci. Univ. Jassy, 22 (1935), 1-117».

[1940] — Recherches sur les logiques non--chrysipiennes. «Ann. Sci. Université de Yassy 26 (1940) 431-466». Reproduzido em Moisil [1972] p. 195-252.

[1941] — Recherches sur les logiques non--chryipiennes. «Ann. Sci. Université Yassy. 27 (1941) 86-98». Repriduzido em Moisil [1972] p. 233-243.

[1942] — Logique modale. «Disquisitiones math et phys. Bucarest. II, 1 (1942) 3-98». Reproduzido em Moisil [1972] p. 341-431.

[1969] — Algebraic Theory of Switching circuits. «Pergamon Press. 1969».

[1972] — Essais sur les logigues non chrysipiennes. «Bucarest (1972) 820 pág.».

[1972-a] — La logique des concepts nuancées. Ver [1972], p. 157-163.

[1972-b] — Les ensembles flous et la logique à trois valeurs [1972], p. 99-103.

[22] — **Monteiro (A.)** [1947] — Sur l'Arithmétique des Filtres Premiers. «C. R. Acad. des Sciences 225 (1947), 846-848».

[1948] — Filtros e Ideais 1. «Notas de Matemática N.º 2. Rio de Janeiro 1948. Filtros e Ideais 2. Notas de Matemática n.º 5. Idem».

[1960]—Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique. «Anais Acad. Brasileira de Ciências» 52 (1960), 1-7».

[1962] — Construcción de los Algebras de Nelson finitas. Resumo de uma comunicação apresentada à la U. M. A.) «Révista da Unión Matematica Argentina 19 (1962), 361.

[1963] — Construction des algèbres de Nelson finies. «Bull. de l'Académic Poloniaise des Sciences 11 (1963) 355-358».

[1968] — Generadores de reticulados distributivis finitos. «Actas del Simposio Panamericano de Matemática Aplicada. Buenos Aires, 1968, 465».

[23] — **Monteiro (L.)** [1967] — Une construction du réticulé distributif libre sur un ensemble ordonné. «Colloquium Mathematicum. 17, fasc. 1 (1967), 23-27».

[1974] — Une construction des algèbres de Morgan libres sur un ensemble ordonné. «Reports en Mathematical Logic. 3 (1974), 31-36».

[1974-a] — Algebras de Lukasiewicz monádicas (Tése de Doutoramento). «Notas de Lógica Matemática n.º 32 (1974). Instituto de Matemática». 108 pág.

[24] — **Monteiro (L.)** et **Pico (D.)** [1963] — Les réticulés de Morgan et l'opération de Sheffer. «Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sciences. Série Sc. Math. Astr. et Phys. 11 (1963) 355-358».

[25] — **Post (E.)** *[1921]* — Introduction to general theory of elementary propositions. Amer. J. Math. 43 (1921) 163-185.

[26] — **Rescher (N.)** [1969] — Many — Valued Logic. «McGraw-Hill Co. New York, 1969, 359 pág.».

[27] — **Rasiowa (H.)** [1974] — An algebraic approach to non-classical Logics «North-Holland Publish Co-Amsterdam. 1974».

[28] — **Rose (A.)** [1950] — A lattice-theoretic caracterization of three valued logic. «J. London Mathematical Soc. 25 (1950), 225-259».

[29] — **Sholander (M.)** [191] — Postulates for distributive lattices. «Canadian Journal of Mathematics 3 (1951), 28-30».

[30] — **Stone (M. M.)** [1934] — Boolean Algebres and their application to topology. «Proc. Nat. Acad. Sci 20 (1934) 197-202».
103-105».

[1935] — Subsumption of Boolean algebras under the theory of rings. «Ihid. 21 (1935),

[1936] — The theory of representation for Boolean algebras. «Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936) 37-111».

[1937] — Topological representations of distributive lattices and Brouwerian algebras. «Cas. Mat. Fys 67 (1937), 1-25.

[31] — **Tarski (Alfred)** [1956] — Logic, Semantics Methamathematics. Editado por «J. H. Woodger. Oxford. Clarendon Press». 1956.

[32] — **Yaglóm (I. M.)** [1977] — Algebra Extraordinária. «Lecciones Populares de Matemáticas. Editorial MIR, Moscú. 1977».

[33] — **Zadeh (L. A.)** [1965] — Fuzzy Sets. «Information and Control 8 (1965) 338-353».

[1965] — Fuzzy Sets and systems. «Proc. of the Symposium on System Theory. Polytechmic Press of the Institute of Brooklyn. New York. 1965. (pág. 29-37)».

[1968] — Fuzzy algorithms. «Information and Control 12 (1968), 94-102».

[1969-1974] — «Ver os n.os 176-200 da lista bibliográfica indicada em De Kerf [1975].

NÚMERO 449/450 SETEMBRO/OUTUBRO 1978 ANO LIII VOLUME XL

C. D. U. 538.3

Homenagem ao Professor Mira Fernandes

Sobre o estabelecimento das condições fronteiras de natureza electrodinâmica numa superfície em movimento

M. ABREU FARO
Universidade Técnica de Lisboa (I. S. T.)
Centro de Electrodinâmica (I. N. I. C.)

SUMÁRIO

É demonstrado que as condições fronteiras numa superfície em movimento se podem obter a partir das condições fronteiras dos corpos em repouso utilizando a Transformação de Lorentz que imobiliza num determinado referencial o ponto em movimento da referida superfície.

Para tanto, foi necessário o prévio estabelecimento das leis de transformação das densidades de carga e de corrente superficiais, o que foi feito com generalidade.

As condições fronteiras estabelecidas coincidem com as condições fronteiras obtidas a partir da forma integral das equações de Maxwell e utilizando os teoremas de Helmholtz associados a superfícies e contornos deformáveis no tempo.

Na demonstração postula-se que determinados integrais tendem para zero o que é fisicamente aceitável mas obriga a analisar com cuidado os modelos em causa e as leis de variações expectáveis das densidades de carga e de corrente.

SUMMARY

It is shown that the boundary conditions at a moving surface can be obtained from the boundary conditions of bodies at rest using the Lorentz Transformations which immobilizes on a certain frame the point moving at the surface referred to.

This required the previous establishment of the transformation laws of densities of surface charge and current, which was generally accomplished. The boundary conditions established coincide with the boundary conditions obtained from the integral form of Maxwell's equations and using the Helmholtz theorems associated with surfaces and contours deforming with time.

In all of this it was necessary to postulate that certain integrals vanish, which is physically acceptable but requires a careful study of the models in question and of the which may by expected from the charge and current densities.

1. INTRODUÇÃO

Num dado referencial de inércia, S (r, t), a electrodinâmica macroscópica é descrita, com generalidade, pelas equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (1\,a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (1\,b)$$

$$\nabla . \mathbf{D} = \rho \qquad (1\,c)$$

$$\nabla . \mathbf{B} = 0 \qquad (1\,d)$$

consistentes com a lei da conservação da carga eléctrica

$$\nabla . \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (1\,e)$$

De acordo com a teoria de Maxwell-Minkowski estas equações deverão ser covariantes sob uma transformação de Lorentz o que significa que num outro referencial de inércia, S′ (r′, t′), assumirão a mesma forma de (1):

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \mathbf{J}' + \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} \qquad (2\,a)$$

* Comunicação à Classe de Ciências da Academia de Ciências de Lisboa, em 23 de Junho de 1977.

$$\nabla' \times E' = -\frac{\partial B'}{\partial t'} \qquad (2\,b)$$

$$\nabla'.D' = \rho' \qquad (2\,c)$$

$$\nabla'.B' = 0 \qquad (2\,d)$$

e

$$\nabla'.J' + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = 0 \qquad (2\,e)$$

Seja a Transformação de Lorentz:

$$\Delta r'_v = \gamma\,(\Delta r - v\,\Delta t)_v \qquad (3\,a)$$

$$\Delta r'_t = \Delta r_t \qquad (3\,b)$$

$$\Delta t' = \gamma\,(\Delta t - \frac{1}{c^2}\,v.\Delta r) \qquad (3\,c)$$

em que

$$\gamma = 1 / \sqrt{1-\beta^2} \qquad (3\,d)$$

$$\beta^2 = v.\,v / c^2 \qquad (3\,e)$$

e v traduz a velocidade de S' (r', t') em relação a S (r, t)

Tratando-se, como se trata, de sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais, sem rotação espacial, a velocidade de S (r, t) em relação a S' (r', t') é (−v).

Em (3), e no que se segue, os índices «v» e «t» sign'ficam respectivamente: segundo v e transversal a v.

Nesta base, as leis de transformação das grandezas figurativas nas equações de Maxwell são as seguintes:

$$E'_v = (E + v \times B)_v \rightarrow E'_v = E_v \qquad (4\,a)$$

$$E'_t = \gamma\,(E + v \times B)_t \qquad (4\,b)$$

$$B'_v = (B - \frac{1}{c^2}\,v \times E)_v \rightarrow B'_v = B_v \qquad (5\,a)$$

$$B'_t = \gamma\,(B - \frac{1}{c^2}\,v \times E)_t \qquad (5\,b)$$

$$D'_v = (D + \frac{1}{c^2}\,v \times H)_v \rightarrow D'_v = D_v \qquad (6\,a)$$

$$D'_t = \gamma\,(D + \frac{1}{c^2}\,v \times H)_t \qquad (6\,b)$$

$$H'_v = (H - v \times D)_v \rightarrow H'_v = H_v \qquad (7\,a)$$

$$H'_t = \gamma\,(H - v \times D)_t \qquad (7\,b)$$

$$J'_v = \gamma\,(J - \rho\,v)_v \qquad (8\,a)$$

$$J'_t = J_t \qquad (8\,b)$$

$$\rho' = \gamma\,(\rho - \frac{1}{c^2}\,v.J) \qquad (8\,c)$$

*
* *

Seja S(r,t) o referencial do laboratório.

Neste referencial observa-se uma superfície

$$F\,(r, t) = F\,(x, y, z, t) = 0 \qquad (9)$$

sede de descontinuidades de natureza electrodinâmica.

A normal "n" num ponto, P (r, t), é dada por

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \qquad (10)$$

Em S(r,t) a velocidade de P(r,t) segundo a normal será então

$$v = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|}\,n \qquad (11)$$

*
* *

Associemos a P (r, t) um referencial, S' (r', t'), sem rotação espacial, que deste modo passa a estar ligado a S (r, t) pela Transformação de Lorentz considerada em (3). A velocidade de S (r, t) em relação a S' (r', t') será, como se salientou, (−v).

*
* *

Em S' (r', t') o ponto P (r, t) está em repouso e bem assim o elemento de superfície a ele associado.

De acordo com o postulado de Minkowski as condições fronteiras são aquelas que resultam das equações de Maxwell para uma superfície em repouso. Relações bem conhecidas e que são:

$$n' \times (H'_1 - H'_2) = J'_s \qquad (12\,a)$$

$$n' \times (E'_1 - E'_2) = 0 \qquad (12\,b)$$

$$n' \times (D'_1 - D'_2) = \rho'_s \qquad (12\,c)$$

$$n'.\,(B_1 - B_2) = 0 \qquad (12\,d)$$

$$n'\,(J'_1 - J'_2) + \nabla'_s\,.\,J'_s + \frac{\partial \rho'_s}{\partial t'} = 0 \qquad (12\,e)$$

em que n' está dirigido segundo o sentido da transição 2 para 1.

De acordo com a teoria de Maxwell-Minkowski as condições fronteiras no referencial S (r, t) e sobre a superfície em movimento

$$F(r, t) = 0$$

deverão resultar de (12) transformando as grandezas nelas intervenientes segundo as leis de tranformação constantes de (4), (5), (6), (7) e (8).

Esta hipótese e decorrente procedimento constituem o motivo e objectivo fundamentais deste trabalho.

Como se verá, chegaremos aos mesmos resultadas de outros autores, [2], [1], [4] e [5] que usaram para a estabelecimento das condições fronteiras as equações de Maxwell sob a forma integral, trabalhando apenas no referencial do laboratório, S (r, t).

2. TRANSFORMAÇÃO DAS DENSIDADES DE CARGA E DE CORRENTE SUPERFICIAIS, ρ_s e J_s

Uma vez que nas condições fronteiras figuram as densidades de carga e de corrente superficiais, ρ_s e J_s, teremos que proceder à sua prévia transformação.

Por definição

$$J'_s = \lim_{\lambda' \to 0} \int_0^{\lambda'} J' \, dx' \qquad t' = \text{const.}^e \tag{13 a}$$

$$\rho'_s = \lim_{\lambda' \to 0} \int_0^{\lambda'} \rho' \, dx' \qquad t' = \text{const.}^e \tag{13 b}$$

em que x' é uma variável dirigida segundo n'.

Poderemos adequar os sistemas de coordenadas de modo a que, para maior simplicidade formal, reduzamos (3) à Transformação Especial de Lorentz:

$$x' = \gamma\,[x - vt] \qquad y' = y \qquad z' = z \tag{14 a}$$

$$t' = \gamma\left[t - \frac{v}{c^2}\,x\right] \tag{14 b}$$

v representa aqui o módulo da velocidade.

Tomemos o segundo membro de (13 a) para t = 0

$$\left[\lim_{\lambda' \to 0} \int_0^{\lambda'} J' \, dx'\right]_{t=0}$$

A t = 0 corresponde, por (14),

$$x' = \gamma x \tag{15 a}$$

$$t' = -\gamma \frac{v}{c^2}\,x = -\frac{v}{c^2}\,x' \tag{15 b}$$

Em S' (r', t') quando se tende para a superfície a densidade de corrente assume carácter transversal pelo que, no domínio [0, λ'], teremos:

$$J'(x', t') \equiv J'_t(x', t') \qquad 0 < x' < \lambda' \tag{16}$$

Tendo em consideração (15 a) e a lei de transformação (8 b), resulta:

$$\lim_{\lambda' \to 0} \int_0^{\lambda'} J'_t(x', t')\, dx' = \gamma \lim_{\lambda \to 0} \int_0^{\lambda} J_t(x, 0)\, dx \tag{17}$$

Por definição

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_0^{\lambda} J_t(x, 0)\, dx = J_{st}(0, 0) \tag{18}$$

Em (17) o limite à esquerda não tem significado claro uma vez que t' não é constante.

Admitindo que é válido o desenvolvimento

$$J'_t(x', t') = J'_t(x', 0) + \frac{\partial J'_t}{\partial t'}\,t' = J'_t(x', 0) - \frac{\partial J'_t}{\partial t'}\,\frac{v}{c^2}\,x' \tag{19 a}$$

imediatamente se conclui que

$$\lim_{\lambda' \to 0} \int_0^{\lambda'} J'_t(x', t')\, dx' = \lim_{\lambda' \to 0} \int_0^{\lambda'} J'_t(x', 0)\, dx' = J'_{st}(0, 0) \tag{19 b}$$

desde que

$$\lim_{\lambda' \to 0} \int_0^{\lambda'} \frac{\partial J'}{\partial t'}\,\frac{v}{c^2}\,x'\, dx' \to 0 \tag{19 c}$$

Admitamos que a condição (19 c) é fisicamente aceitável.

Sendo assim, resulta de (17), (18) e (19):

$$J'_{st}(0,0) = \gamma\, J_{st}(0,0) \qquad (20)$$

que nos dá a lei de transformação pretendida para a componente transversal da densidade de corrente superficial.

*
* *

Vejamos agora o caso de ρ'_s

De acordo com (8) e hipótese (16), na superfície

$$J'_x = \gamma\,(J_x - \rho v) = 0 \qquad (21\,a)$$

$$J'_t = J_t \qquad (21\,b)$$

$$\rho' = \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2} J_x\right) \qquad (21\,c)$$

Conjugando (21 a) com (21 c) e tendo em consideração (3 d) obtém-se sucessivamente:

$$\rho' = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\rho = \frac{1}{\gamma}\,\rho \qquad (22)$$

Utilizando uma técnica semelhante àquela que se usou para J'_s e postulando que

$$\lim_{\lambda' \to 0} \int_0^{\lambda'} \frac{\partial \rho'}{\partial t'}\,\frac{v}{c^2}\,x'\,dx'$$

se anula, imediatamente se obtém

$$\rho'_s(0,0) = \rho_s(0,0) \qquad (23)$$

*
* *

Finalmente, tendo em atenção (21 a)

$$J_x = \rho v \qquad (24\,a)$$

de onde resulta

$$J_s . n = v \rho_s \qquad (24\,b)$$

Conclusão:

— As leis de transformação pretendidas são:

$$J'_{st} = \gamma\, J_{st} \qquad (25\,a)$$

$$\rho'_s = \rho_s \qquad (25\,b)$$

— J'_s tem carácter transversal

$$J'_s = J'_{st} \qquad (25\,c)$$

$$J'_{sx'} = J'_s . n' = 0 \qquad (25\,d)$$

— J_s não tem carácter transversal. De facto:

$$J_s = J_{st} + J_{sv} = J_{st} + (J_s . n)\, e_v \qquad (25\,e)$$

$$J_s . n = v\, \rho_s \qquad (25\,f)$$

em que e_v é o versor associado à velocidade relativa e v o seu módulo.

J_s perde o carácter transversal devido ao termo

$$(J_s . n)\, e_v = \rho_s v\, e_v \qquad (25\,g)$$

que traduz a convecção da densidade de carga superficial ρ_s.

3. CONDIÇÕES FRONTEIRAS PARA OS CAMPOS E, H, D e B

Resultam imediatamente das leis de transformação, (4) a (7), conjugadas com as leis de transformação das densidades de carga e de corrente superficiais, (25), quando aplicadas às condições fronteiras para os corpos em repouso, (12).

Comecemos com

$$n' . (D'_1 - D'_2) = \rho'_s \quad \text{em que} \quad n' \equiv n \qquad (12\,c)$$

Teremos sucessivamente:

$$n' . [(D'_{1v} + D'_{1t}) - (D'_{2v} + D'_{2t})] = \rho'_s \qquad (26\,a)$$

equivalente a

$$n' . (D'_{1v} - D'_{2v}) = \rho'_s \qquad (26\,b)$$

uma vez que

$$n' . D'_{1t} = 0 \quad \text{e} \quad n' . D'_{2t} = 0 \qquad (26\,c)$$

Atendendo a (6 a) e (25 b), teremos:

$$n . (D_{1v} - D_{2v}) = \rho_s \qquad (26\,d)$$

o que, por razões análogas a (26 c), permite escrever

$$n . (D_1 - D_2) = {}_s \qquad (26\,e)$$

Por procedimento análogo se obteria

$$n . (B_1 - B_2) = 0 \qquad (27)$$

*

* *

Estamos agora em condições de transformar

$$n' \times (H'_1 - H'_2) = J'_s \quad \text{em que } n' \equiv n \qquad (12\,a)$$

Uma vez que J'_s se reduz à componente transversal, (12 a) reduz-se também a

$$n' \times (H'_1 - H'_2) = J'_{st} \qquad (28\,a)$$

equivalente a

$$n' \times (H'_{1t} - H'_{2t}) = J'_{st} \qquad (28\,b)$$

uma vez que

$$n' \times H'_{1v} = 0 \quad \text{e} \quad n' \times H'_{2v} = 0$$

Atendendo a (7 b) e a (25 a) obtém-se:

$$n \times \gamma\,[(H_1 - v \times D_1)_t - (H_2 - v \times D_2)_t] = \gamma\, J_{st} \qquad (28\,c)$$

que poderemos escrever

$$n \times (H_1 - H_2) - n \times [v \times (D_1 - D_2)] = J_{st} \qquad (28\,d)$$

Resolvendo o duplo produto externo virá

$$n \times (H_1 - H_2) - [n \,.\, (D_1 - D_2)]\, v + (n \,.\, v)\,(D_1 - D_2) = J_{st} \qquad (28\,e)$$

Atendendo a (26 e) e a (25 e) obtém-se sucessivamente

$$n \times (H_1 - H_2) + (n \,.\, v)\,(D_1 - D_2) = J_{st} + \rho_s v = J_{st} + J_{sv} = J_s \qquad (28\,f)$$

Determinámos assim a relação que pretendíamos.

Analogamente e de

$$n' \times (E' - E'_2) = 0$$

se obtinha, tomando a lei de transformação (4 b):

$$n \times (E_1 - E_2) - (n \,.\, v)\,(B_1 - B_2) = 0 \qquad (29)$$

*

* *

Conclusão:

Convencionado designar por

$$[A] = A_1 - A_2$$

e por n a normal à superfície, dirigida no sentido da transição 2 para 1, as condições fronteiras dos campos H, E, D e B são as seguintes:

$$n \times [H] + (n \,.\, v)\,[D] = J_s \qquad (30\,a)$$

$$n \times [E] - (n \,.\, v)\,[B] = 0 \qquad (30\,b)$$

$$n \,.\, [D] = \rho_s \qquad 30\,c)$$

$$n \,.\, [B] = 0 \qquad (30\,d)$$

verificando-se entre J_s e ρ_s a relação

$$n \,.\, J_s = (n \,.\, v)\,\rho_s \qquad (30\,e)$$

que traduz a convecção da densidade de carga superficial ρ_s.

*

* *

Nesta notação as condições fronteiras para os corpos em repouco escrevem-se:

$$n' \times [H'] = J'_s \qquad (31\,a)$$

$$n' \times [E'] = 0 \qquad (31\,b)$$

$$n' \,.\, [D'] = \rho_s \qquad (31\,c)$$

$$n' \,.\, [B'] = 0 \qquad (31\,d)$$

e ainda

$$n' \,.\, J'_s = 0 \qquad (31\,e)$$

4. CONDIÇÕES FRONTEIRAS PARA AS DENSIDADES DE CORRENTE E DE CARGA SUPERFICIAIS

Consideremos o caso dos corpos em repouso, (12 e),

$$n' \,.\, (J'_1 - J'_2) + \nabla'_s \cdot J'_{st} + \frac{\partial \rho'_s}{\partial t'} = 0 \quad \text{em que } n' \equiv n$$

Seja dS' um elemento infinitesimal de superfície, na vizinhança de P(r', t').

Poderemos escrever

$$n' \,.\, (J'_1 - J'_2)\, dS' + (\nabla'_s \,.\, J'_{st})\, dS' + \frac{\partial}{\partial t'}(\rho'_s\, dS') = 0 \qquad (32)$$

Adoptando a mesma transformação de Lorentz que utilizámos na secção anterior, teremos:

$$x = \gamma\,(x' + vt') \qquad (33\,a)$$

$$y = y' \qquad (33\,b)$$

$$z = z' \qquad (33\,c)$$

$$t = \gamma\,(t' + \frac{v}{c^2}\,x') \qquad (33\,d)$$

de onde resulta que

$$\nabla'_s \equiv \nabla_s \quad \text{e} \quad dS' \equiv dS \qquad (34)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'}\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'}\,\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\,v\frac{\partial}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial t} \qquad (35\,a)$$

A relação (35 a) pode revestir a forma

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\,(v\,.\,n)\frac{\partial}{\partial n} + \gamma\frac{\partial}{\partial t} \qquad (35\,b)$$

uma vez que x é dirigido segundo a normal e v designa a velocidade, em notação vectorial.

Atendendo a (8 a) teremos

$$n'.\,J' = \gamma\,n\,.\,[J - \rho v] = \gamma\,[n\,.\,J - (n\,.\,v)\,\rho] \qquad (36)$$

Posto isto e atendendo à lei de tranformação da densidade de corrente superficial e de carga superficial, (25 a) e (25 b), a equação (32) assume a seguinte forma:

$$[\gamma\,n\,.\,[J] - \gamma\,(v\,.\,n)\,[\rho] + \gamma\nabla_s\,.\,J_{st}]\,dS +$$

$$+ \gamma\,[(v\,.\,n)\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial t}]\,\rho_s\,dS = 0 \qquad (37)$$

Antes de simplificar (37) notemos que dS não depende do tempo mas poderá depender de n admitindo que a superfície

$$F\,(r, t) = 0$$

exiba variação espacial em relação a um dado conteúdo de carga superficial que suporte. Isto acontecerá, por exemplo, havendo curvatura.

Sendo assim ,e dividindo por γ, obtém-se:

$$[n\,.\,[J] - (v\,.\,n)\,[\rho] + \nabla_s\,.\,J_{st}]\,dS + \frac{\partial \rho_s}{\partial t}\,dS +$$

$$+ (v\,.\,n)\frac{\partial \rho_s}{\partial n}\,dS + \rho_s\,(v\,.\,n)\frac{\partial}{\partial n}\,dS = 0 \qquad (38)$$

Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial n}\,dS = \lim_{\Delta n \to 0}\frac{\Phi\,(\Delta n) - \Phi\,(0)}{\Delta n} \qquad (39\,a)$$

em que $\Phi\,(\Delta n)$ e $\Phi\,(0)$ representam respectivamente o fluxo da normal n através das superfícies dS (Δn) e dS (0). Aplicando o teorema dadivergência,teremos:

$$\frac{\partial}{\partial n}\,dS = \lim_{\Delta n \to 0}\frac{dS\,(0)\;\nabla\,.\,n\;\Delta n}{\Delta n} = dS\,\nabla\,.\,n \qquad (39\,b)$$

em que se designou

$$dS = dS\,(0)$$

Substituindo este resultado em (38) e simplificando obtém-se, finalmente, a relação pretendida:

$$n\,.\,[J] - (v\,.\,n)\,[\rho] + \nabla_s\,.\,J_{st} + (v\,.\,n)\frac{\partial \rho_s}{\partial n} +$$

$$+ (v\,.\,n)\,\rho_s\,\nabla\,.\,n + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \qquad (40)$$

De acordo com (39 a)

$\nabla\,.\,n > 0$, se n está dirigido para o exterior da concavidade de $F\,(r, t) = 0$

$\nabla\,.\,n < 0$, se n está dirigido para o interior da concavidade de $F\,(r, t) = 0$ (41)

Uma vez que

$$J_s = J_{st} + J_{sv}$$

e notando que:

$$n \times (n \times J_s) = n \times (n \times J_{st}) = -J_{st} \qquad (42)$$

a condição fronteira (40) pode ser escrita em função de J_s:

$$n\,.\,[J] - (v\,.\,n)\,[\rho] - \nabla_s\,.\,[n \times (n \times J_s)] +$$

$$+ (v\,.\,n)\;\nabla\,.\,(\rho_s n) + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \qquad (43)$$

desle que se atenda à identidade

$$\nabla\,.\,(\rho_s\,n) = \frac{\partial \rho_s}{\partial n} + \rho_s\,\nabla\,.\,n = n\,.\,\nabla\rho_s + \rho_s\,\nabla\,.\,n$$

5. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS LEIS DE TRANSFORMAÇÃO DAS DENSIDADES DE CARGA E DE CORRENTE SUPERFICIAIS

Consideremos a condição fronteira

$$n \times [H] + (v\,.\,n)\,[D] = J_s \quad \text{em que } n \equiv n' \qquad (28\,f)$$

que se pode escrever sob a forma equivalente

$$n \times [H_t] + (v\,.\,n)\,[D_t] = J_{st} \qquad (44)$$

Uma vez que a velocidade de S (r, t) em relação a S' (r', t') é (—v), segue-se de (7 b) e (6 b) que

$$[H_t] = \gamma [[H'_t] + v \times [D'_t]] \qquad (45\,a)$$

$$[D_t] = \gamma \left[[D'_t] - \frac{1}{c^2} v \times [H'_t] \right] \qquad (45\,b)$$

Substituindo no primeiro membro de (44) obtém-se sucessivamente:

$$\gamma n' \times [H'_t] + v \times [D'_t]] +$$

$$+ (n'.v) \gamma \left[[D'_t] - \frac{1}{c^2} v \times [H'_t] \right] \qquad (46)$$

$$= \gamma \left[[n' \times [H'_t] - \frac{1}{c^2} (n'.v) v \times [H'_t] \right] +$$

$$+ \gamma \left[n' \times (v \times [D'_t]) + (n'.v) [D'_t] \right]$$

Notando que

$$v = (v.n') n'$$

teremos

$$\gamma \left[n' \times [H'_t] - \frac{1}{c^2} (n'.v) v \times [H'_t] \right] =$$

$$= \gamma \left[1 - \frac{(n'.v)^2}{c^2} \right] [H'_t] = \frac{1}{\gamma} [H'_t] \qquad (47)$$

$$\left[n' \times (v \times [D'_t]) + (n'.v) [D'_t] \right] = 0 \qquad (48)$$

Sendo assim, resultará para (44)

$$\frac{1}{\gamma} [H'_t] = J_{st} \qquad (49)$$

o que implica

$$[H'_t] = \gamma J_{st} = J'_{st} \qquad (50)$$

e finalmente

$$J'_{st} = \gamma J_{st} \qquad (51)$$

Conclui-se assim que a lei de transformação que obtivemos em (20) se confirma e a sua interpretação física é a seguinte:

A transformação

$$J_{st} = \frac{1}{\gamma} J'_{st} = \sqrt{1-\beta^2} J'_{st} \qquad (52)$$

mostra-nos que J'_{st} deve ser interpretado como um limite que resulta de uma integração sobre um comprimento próprio «λ'» de uma densidade J'_{st} que se mantém invariante e em S (r, t) é integrada sobre um comprimento «λ» que se oferece contraído em relação ao comprimento próprio «λ'».

Deste modo fica clarificada, e sem qualquer ambiguidade, uma lei de transformação que sem esta análise poderia oferecer-se recíproca.

Na realidade, e essencialmente, trata-se da transformação de uma densidade em repouso, J'_{st}, para aquela que se mede em movimento, J_{st}, em S (r, t) e num dado instante t = const.ª.

*
* *

No que respeita à obtenção da lei de tranformação da densidade de carga superficial

$$\rho_s = \rho'_s \qquad (53)$$

a atitude foi a mesma conjugada com as leis de transformação do quadrivector [J, ρ].

Verifica-se no caso presente a existência de uma densidade de carga

$$-\frac{v}{c^2} J_x \qquad (54)$$

associada a uma densidade de corrente de convecção

$$J_x = \rho v \qquad (55)$$

6. RESUMO DAS CONDIÇÕES FRONTEIRAS PARA UMA SUPERFÍCIE EM MOVIMENTO

Em resumo podemos dizer que as condições fronteiras para uma superfície em movimento, são as seguintes:

$$n \times [H] + (v.n) [D] = J_s \qquad (56\,a)$$

$$n \times [E] - (v.n) [B] = 0 \qquad (56\,b)$$

$$n.[D] = \rho_s \qquad (56\,c)$$

$$n.[B] = 0 \qquad (56\,d)$$

$$n.J_s = (v.n) \rho_s \qquad (56\,e)$$

$$n.[J] - (v.n) [\rho] - \nabla_s.[n \times (n \times J_s)] +$$

$$+ (v.n) \nabla.(\rho_s n) + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \qquad (56\,f)$$

Estes resultados foram estabelecidos para uma superfície de descontinuidades exibindo localmente e no referencial do laboratório uma velocidade de P (r, t), normal à superfície, dada por

$$v_n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} n$$